# AM PRÁCTICA-2

**Nombre y apellidos**..........................................................................

$1_1$.- Sea $f(x) = 3\cos 2x + 2\,\mathrm{sen}\, 3x$ $\ x \in [-\pi, \pi]$ ¿Cuáles son los coeficientes de Fourier de $f$? LA PRUEBA $f$ VIENE DADA POR UNA SERIE DE FOURIER. ASÍ $a_n = 0 \ \forall n \neq 2$ y $a_2 = 3$

y $b_n = 0 \ \forall n \neq 3$ y $a_3 = 2$

$1_2$.- Sea $f(x) = 3\cos^2 2x + 2\,\mathrm{sen}^2\, 3x$ $\ x \in [-\pi, \pi]$ ¿Cuáles son los coeficientes de Fourier de $f$? (**Indicación:** $\cos^2 a = (\frac{\cos 2a+1}{2})$ y $\cos^2 a + \mathrm{sen}^2\, a = 1$ ).

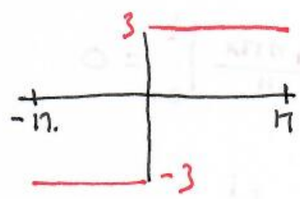
$$f(x) = 3\cos^2 2x + 2\,\mathrm{sen}^2\, 3x = 3\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) + 2\left(1 - \cos^2 3x\right) =$$

$$= 3/2 + 3/2 \cos 4x + 2 - 2\left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right) = 3/2 + 1 + 3/2\cos 4x - \cos 6x$$

LUEGO $\frac{a_0}{2} = 5/2$, $a_4 = 3/2$ y $a_6 = -1$; $a_n = 0 \ \forall n \neq 0, 4$ y $6$

y $b_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$2_1$.- Sea $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \in (0, \pi] \\ -3 & \text{si } x \in [-\pi, 0] \end{cases}$. Calcula su serie de Fourier.



$f$ ES IMPAR LUEGO $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\,\mathrm{sen}\, nx}_{\text{PAR}}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 3\,\mathrm{sen}\, nx\, dx =$$

$$= \frac{6}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{6}{n\pi}\left(-(-1)^n + 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{SI } n \text{ ES PAR} \\ \frac{12}{n\pi} & \text{SI } n \text{ ES IMPAR} \end{cases}$$

ASÍ LA SERIE DE FOURIER ES

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{12}{(2k+1)\pi}\,\mathrm{sen}\,(2k+1)x$$

( SI $x = 0$, LA SERIE SE ANULA; LO QUE NOS DICEN LOS TEOREMAS DE CONVERGENCIA $\frac{3+(-3)}{2} = 0$ )

$2_2$.- Calcula la suma de la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

**Indicación:** ¿qué ocurre en $x = 0$ ó $x = \pi/2$?

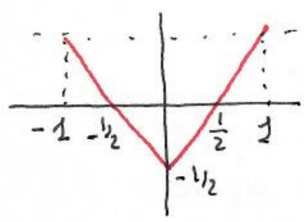
POR LOS TEOREMAS DE CONVERGENCIA, PARA $x = \pi/2 \in [0, \pi]$

$$3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{12}{(2n+1)\pi}\,\mathrm{sen}\,(2k+1)\pi/2 \iff \frac{3}{12}\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$



LUEGO $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

**3.-** Calcula la serie de Fourier de función $f(x) = |x| - \frac{1}{2}$ para $x \in [-1, 1]$. (**Indicación:** ¿Cuál es el periodo de $f$? ¿Cuál es su paridad?).




$f$ es una función par, por tanto su serie de Fourier será de la forma $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x + b_n \operatorname{sen} n\pi x$:

Como $f$ es par ( $f(x) = f(-x)$ ), $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{f(x)}_{\text{par}}\, dx = 2\int_0^1 x - 1/2\, dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x\right)\Big|_0^1 = 0.$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} \underbrace{(|x| - 1/2)\cos n\pi x}_{\text{par}}\, dx = 2\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)\cos n\pi x\, dx =$$

$$\# \quad 2\int_0^1 -\frac{1}{2}\cos nx\pi\, dx = -\int_0^1 \cos n\pi x\, dx = -\left(\frac{\operatorname{sen} n\pi x}{n}\right)\Big|_0^1 = 0$$

$$\# \quad 2\int_0^1 x \cos nx\pi\, dx \underset{\text{por partes}}{=} 2\left[\cancel{\frac{x \operatorname{sen} n\pi x}{n\pi}}\right]_0^1 - 2\frac{1}{n\pi}\int_0^1 \operatorname{sen} n\pi x\, dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ -\frac{4}{n^2\pi^2} & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ -\frac{4}{n^2\pi^2} & n \text{ impar.} \end{cases}$$

La serie de Fourier buscada es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{(2k+1)^2\pi^2}\cos(2k+1)\pi x$$

Observación: si $x = 1/2$ ó $x = -1/2$ la serie se anula coincidiendo con $f(1/2) = f(-1/2) = 0$