ÁLGEBRA LINEAL.

Otras aplicaciones de los Determinantes.

Volumen de un paralelepípedo. Dados tres vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$ de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes, estos generan un paralelepípedo, ver la figura:

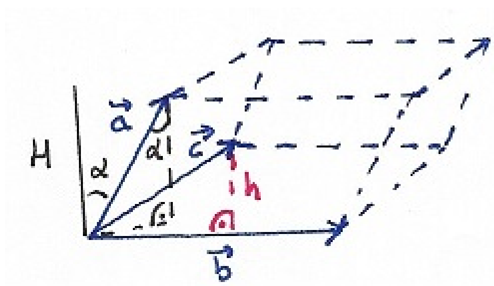

Figura 1. Volumen del paralelepípedo.

Observemos que la base la generan $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$, que tiene por **área**

$$||\overrightarrow{b}||\,h =$$
$$||\overrightarrow{b}||\,||\overrightarrow{c}||\,|\operatorname{sen}(\sphericalangle\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c})| = ||\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}||$$

donde hemos usado la fórmula para calcular el módulo del **producto vectorial** de dos vectores (mirar la Hoja-6 de problemas; también el Apéndice, El plano y El espacio: medida de ángulos).

Por otro lado, la **altura** H del paralelepípedo está sobre un vector ortogonal a la base $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$, el cúal tiene por módulo

$$H = ||\overrightarrow{a}||\cos(\sphericalangle\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})).$$

El volumen del paralelepípedo viene dado por

$$V = \text{área de la base } \times \text{ altura} =$$
$$||\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}||\,||\overrightarrow{a}||\cos(\sphericalangle\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})) =$$

esto no es más que un producto escalar

$$< \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} >=$$

usando la definición de producto escalar y vectorial

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} =$$

y teniendo en cuenta el desarrollo de un determinante por una columna y que el determinante de una matriz y su transpuesta coinciden

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

El Jacobiano. Dada una función

$$\begin{array}{rcccl} F & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & & x = (x_1, ..., x_n) & \to & F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x)), \end{array}$$

la matriz de las derivadas parciales o matriz **diferencial**

$$DF(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada que admite un determiante. Llamamos **Jacobiano** de la función F al determinante de su matriz diferencial

$$JF(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix}.$$

Observación 1.

- *Si $n = 3$ se puede ver que $JF(x)$ determina el volumen del paralelepípedo generado por los vectores transformados de la base canónica $\{e_1, e_2 e_3\}$ por la transformación lineal que tiene por matriz a $DF(x)$.*
- *El jacobiano es esencial en el **Teorema del Cambio de Variable** para las integrales múltiples.*

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es