ÁLGEBRA LINEAL.

El Grupo de Permutaciones.

Vamos a considerar las aplicaciones biyectivas de un conjunto de n elementos en sí mismo. En concreto:

Definición 1. *Consideramos el conjunto de aplicaciones*

$$S_n = \{f : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\} \quad : \quad f \ \textit{biyectiva}\}.$$

Al conjunto S_n se le llama conjunto de las ***Permutaciones*** *de n elementos.*

Ejemplo 1.

$$\begin{array}{ccccccc} f_{i,j} & : & \{1,2,....,n\} & \to & \{1,2,....,n\} & & \\ & & k & \to & f(k) & = & \left\{ \begin{array}{ccc} k & si & k \neq i \, o \, j \\ j & si & k = i \\ i & si & k = j \end{array} \right. \end{array}$$

$f_{i,j} \in S_n$.

Demostración: Gráficamente

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \searrow & & \swarrow & & \downarrow \\ 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \end{array}$$

Esta aplicación es claramente biyectiva $\square$

Sobre S_n podemos definir una operación, la **composición** de aplicaciones:

$$\begin{array}{ccccc} \circ & : & S_n \times S_n & \to & S_n \\ & & (g, f) & \to & g \circ f \end{array}$$

Ejemplo 2. *Si componemos la permutación $f_{i,j}$ con $f_{j,i}$, entonces*

$$f_{j,i} \circ f_{i,j}(k) = k \qquad \textit{para todo } k \in \{1, 2, .., n\}.$$

Así $f_{i,j} \circ f_{j,i} = I$, donde I es la aplicación ***Identidad****.*

Con esta operación el conjunto de permutaciones tiene estructura de **Grupo**.

Proposición 1. *$(S_n, \circ)$ el conjunto de las **permutaciones** con la operación de **composición** de aplicaciones tienen estructura de **Grupo**. Es decir, la **composición** es **asociativa**, existe un **elemento neutro** y cada $f \in S_n$ tiene un **elemento inverso**.*

Demostración: La composición de aplicaciones biyectivas

$$\begin{array}{cccc} \circ & : & S_n \times S_n & \to & S_n \\ & & (g, f) & \to & g \circ f \end{array}$$

es de nuevo una aplicación biyectiva. Luego la composición está bien definida sobre S_n.

Veamos además que:

- **Asociativa:** si $f, g, h \in S_n$ y $k \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces
$$(f \circ g) \circ h(k) = (f \circ g)(h(k)) = f(\, g(h(k)\,) =$$
$$f(\, g \circ h(k)\,) = f \circ (g \circ h)(k).$$
- **La identidad I es el Elemento Neutro:** ya que si $f \in S_n$ y $k \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces
$$I \circ f(k) = I(f(k)) = f(k) = f(I(k)) = f \circ I(k).$$
- **Elemento Inverso**: de $f \in S_n$. Como f es biyectiva, existe su inversa
$$f^{-1} : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$$
la cual tiene la propiedad de que

$$f^{-1} \circ f(k) = f \circ f^{-1}(k) = k = I(k) \qquad \text{para todo } k \in \{1, 2, ..., n\} \quad \square$$

Observación 1. *$(S_n, \circ)$ **no** tiene la propiedad **conmutativa**. En eso se parece al producto de matrices cuadradas que tampoco tiene esta propiedad.*

Ejemplo 3. *Sean $f_{1,n}, f_{2,n} \in S_n$.*

Demostración: Se tiene que

$$f_{1,n} \circ f_{2,n}(1) = f_{1,n}(f_{2,n}(1)) = f_{1,n}(1) = n.$$

Por otro lado

$$f_{2,n} \circ f_{1,n}(1) = f_{2,n}(f_{1,n}(1)) = f_{2,n}(n) = 2.$$

Luego $f_{1,n} \circ f_{2,n} \neq f_{2,n} \circ f_{1,n}$ $\square$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`