ÁLGEBRA LINEAL.

Distintos tipos de Permutaciones.

Vamos a tratar de describir las permutaciones como composición de algunas otras que son más "simples". Para ello debemos describir algunos tipos de permutaciones.

Definición 1. *Sea $f \in S_n$ y sea $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Se llama* ***Órbita*** *de i repecto de la permutación f al subconjunto de $\{1, 2, .., n\}$ definido por*

$$Orb_i(f) = \{i, f(i), f^2(i), ..., f^r(i)\} \subset \{1, 2, ..., n\},$$

donde $f^k(i) = f \circ f \circ .... \circ_{k-veces} f(i)$ y

$$f^k(i) \neq i \qquad si \quad k \leq r \quad y \quad f^{r+1}(i) = i.$$

(Claro $f^0 = I$ es la identidad).

Observación 1. *La órbita de un elemento i, $Orb_i(f)$, está formada por $r+1$ elementos distintos y a lo más $r = n-1$.*

Demostración: Si los elementos de $Orb_i(f)$ son distintos, como es un subconjunto de $\{1, 2, ..., n\}$, a lo más puede tener n elementos, luego

$$r \leq n-1.$$

Veamos que los elementos son distintos. Si para $1 \leq k_1 < k_2 \leq r$ tenemos que

$$j = f^{k_1}(i) = f^{k_2}(i) \neq i,$$

entonces

$$f(\, f^{k_1-1}(i)\,) = f(\, f^{k_2-1}(i)\,).$$

Como f es biyectiva

$$f^{k_1-1}(i) = f^{k_2-1}(i).$$

Repitiendo el proceso hasta k_1 veces vemos que

$$i = f^{k_2-k_1}$$

y llegamos a contradicción con $f^k(i) \neq i \quad$ si $\quad k \leq r \qquad \square$

Observación 2. *Dada $f \in S_n$ la **relación** de $i, j \in \{i, 2, ..., n\}$*

$$i\, R_f\, j \qquad \Leftrightarrow \qquad \textit{existe } k \textit{ tal que } f^k(i) = j,$$

*es decir i y j **están en la misma órbita**, es una **relación de equivalencia** sobre $\{i, 2, ..., n\}$.*

Demostración: Veamos que R es una relación de equivalencia.

- **Reflexiva:** tenemos $i\, R_f\, i$ ya que $i = f^0(i) \in Orb_i(f)$.
- **Simétrica:** si $i\, R_f\, j$, entonces existe $k < r$ con

  $$f^k(i) = j \qquad \text{y} \qquad f^r(i) = i.$$

  Luego

  $$f^{r-k}(j) = f^{r-k}(f^k(i)) = f^r(i) = i.$$

  Lo que prueba que $j\, R_f\, i$.
- **Transitiva:** si $i\, R_f\, j$ y $j\, R_f\, h$, entonces existe k y k' con

  $$j = f^k(i) \qquad \text{y} \qquad h = f^{k'}(j),$$

  así

  $$f^{k'+k}(i) = f^{k'}(f^k(i)) = f^{k'}(j) = h.$$

  Por tanto $i\, R_f\, h \qquad \square$

Fijado un $f \in S_n$, la relación anterior, al ser de equivalencia, determina una partición del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. En otras palabras, las órbitas respecto de una permutación f forman una **partición disjunta** de subconjuntos de $\{1, 2, ..., n\}$.

Usando las órbitas, vamos a señalar unas clases especiales de permutaciones. Estas van a tener la particularidad que son "sencillas" y que permiten construir todas las demás permutaciones a partir de ellas.

Definición 2. *Sea S_n el grupo de permutaciones de n elementos.*

A) *$f \in S_n$ se llama **Ciclo** si todas las órbitas respecto de f menos una son unitarias.*

B) *$f \in S_n$ se llama **Transposición** si f es un ciclo y su única órbita no unitaria tiene solo dos elementos.*

Ejemplo 1. 1) *Sea f de modo que*

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ \searrow & \searrow & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{array}$$

Así

$$Orb_1(f) = \{1,2,3\} \qquad y \qquad Orb_k(f) = \{k\} \qquad para\ todo\ k > 3.$$

f es un ciclo

2) *Si $i, j \in \{1,2,...,n\}$, $i \neq j$ y como vimos antes consideramos*

$$\begin{cases} k & si \quad k \neq i \text{ o } j \\ j & si \quad k = i \\ i & si \quad k = j \end{cases},$$

entonces

$$Orb_i(f) = \{i,j\} \qquad y \qquad Orb_k(f) = \{k\} \qquad para\ todo\ k \neq i \text{ o } j.$$

f es un transposición.

Observemos que una transposición f intercambia el "orden" de dos elementos de $\{1,2,..,n\}$;

$$f(\{1,2,..,n\}) = \{1,....i-1,j,i+1,...,j-1,i,j+1,....,n\}.$$

Un ciclo intercambia el orden de dos elementos o más.

Vamos a ver que toda permutación $f \in S_n$ se puede descomponer en composición de ciclos y que estos a su vez se puedes descomponer en composiciones de transposiciones. Que a su vez se descomponen el transposiciones contiguas.

Proposición 1. *Sea S_n el grupo de las permutaciones de n elementos.*

a) *Si $f \in S_n$, entonces*

$$f = \alpha_p \circ ..... \circ \alpha_2 \circ \alpha_1,$$

donde cada α_j es un ciclo.

b) *Si $\alpha \in S_n$ es un ciclo, entonces*

$$\alpha = T_q \circ ..... \circ T_2 \circ T_1,$$

donde cada T_j es una transposición.

c) *Si $f \in S_n$, entonces f se puede escribir como una composición de transposiciones.*

***Demostración:* a)** Para $f \in S_n$, sabemos que las órbitas respecto de f dividen el conjunto $\{1, 2, ...n\}$, es decir

$$\{1, 2, ...n\} = \bigcup_{j=1}^{p} Orb_{i_j}(f),$$

donde las órbitas anteriores son todas disjuntas. Se consideran los ciclos

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_j & : & \{1,2,...,n\} & \to & \{1,2,...,n\} & \\ & & i & \to & \alpha_j(i) & = \left\{ \begin{array}{ccc} f^{k+1}(i_j) = f(i) & \text{si} & i = f^k(i_j) \\ i & \text{si} & i \notin Orb_{i_j}(f). \end{array} \right. \end{array}$$

Entonces

$$f = \alpha_p \circ ..... \circ \alpha_2 \circ \alpha_1,$$

ya que si $i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces existe un único j_0 tal que

$$i \in Orb_{i_{j_0}}(f)$$

y así

$$\alpha_j(i) = i \qquad \text{para todo} \qquad j < j_0;$$

$$\alpha_{j_0}(i) = f(i) \in Orb_{i_{j_0}}(f)$$

y

$$\alpha_j(\alpha_{j_0}(i)) = \alpha_{j_0}(i) = f(i) \qquad \text{para todo } \; j > j_0.$$

b) Si α es un ciclo y para $i_0 \in \{1, 2, ..., n\}$

$$Orb_{i_0}(\alpha) = \{i_0, \alpha(i_0), ..., \alpha^r(i_0)\}$$

es su única órbita no unitaria, entonces

$$\alpha = f_{i_0,\alpha^r(i_0)} \circ f_{i_0,\alpha^{r-1}(i_0)} \circ ..... \circ f_{i_0,\alpha^2(i_0)} \circ f_{i_0,\alpha(i_0)}.$$

Claro, si

$$j \notin Orb_{i_0}(\alpha) \qquad \Rightarrow \qquad f_{i_0,\alpha^k(i_0)}(j) = j \quad \text{para } k = 0, 1, ..., r.$$

Si $j = \alpha^k(i_0)$ para algún k, entonces

$$f_{i_0,\alpha^m(i_0)}(\alpha^k(i_0)) = \alpha^k(i_0) \qquad \text{para} \quad m < k \text{ o } m > k.$$

Y

$$f_{i_0,\alpha^{k+1}(i_0)} \circ f_{i_0,\alpha^k(i_0)}(\alpha^k(i_0)) = f_{i_0,\alpha^{k+1}(i_0)}(i_0) = \alpha^{k+1}(i_0) \qquad \square$$

Observación 3. *Con la notación de la Proposición anterior, tenemos lo siguiente.*

a) *Sea $f \in S_n$ descompuesto en ciclos*

$$f = \alpha_p \circ ..... \circ \alpha_2 \circ \alpha_1,$$

según la Proposición anterior. Entonces

$$Orb_{i_j}(f) = Orb_{i_j}(\alpha_j) \qquad para\ j = 1, 2, ..., p$$

y por la la naturaleza disjunta de las orbitas de f se sigue que

$$Orb_{i_j}(\alpha_j) \bigcap Orb_{i'_j}(\alpha'_j) = \emptyset \qquad si\ j \neq j'.$$

Además

$$\alpha_j \circ \alpha_{j'} = \alpha_{j'} \circ \alpha_j.$$

b) *Sea $T = f_{i,j}$ una transposición con $i < j$. T se puede escribir como una composición de un número impar de transposiciones consecutivas:*

$$f_{i,j} = f_{i+1,i} \circ f_{i+2,i+1} \circ .... \circ f_{j-1,j-2} \circ f_{j-1,j} \circ ...... \circ f_{i+1,i+2} \circ f_{i,i+1} = h \circ g,$$

$2(j-i)-1$ *transposiciones.*
c) *Luego toda permutación $f \in S_n$ se puede escribir como composición de transposiciones consecutivas.*

Demostración: Solo tenemos que demostrar la igualdad de **b)** . Sean

$$k < i < i + r < j < k'.$$

Así,

- para i, se tiene que
$$g(i) = j \qquad \text{y} \qquad h(j) = j;$$
- para j, se tiene que
$$g(j) = j - 1 \qquad \text{y} \qquad h(j-1) = i;$$
- para k, con $k < i$ o $k > j$, se tiene que
$$g(k) = k \qquad \text{y} \qquad h(k) = k;$$
- para $i + r$, se tiene que
$$g(i+r) = i + r - 1 \qquad \text{y} \qquad h(i+r-1) = i + r \qquad \square$$

Ejemplo 2. *Se considera la permutación f :*

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}.$$

Demostración:

$$f = f_{1,5} \circ f_{2,4} = f_{2,4} \circ f_{1,5} =$$

donde las transposiciones conmutan por tener órbitas no unitarias disjuntas, ademas usando b) de la Observación anterior

$$(f_{3,2} \circ f_{3,4} \circ f_{2,3}) \circ (f_{2,1} \circ f_{3,2} \circ f_{4,3} \circ f_{4,5} \circ f_{3,4} \circ f_{2,3} \circ f_{1,2}) \qquad \square$$

Ejemplo 3. *Se considera la permutación f :*

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{array}.$$

Demostración: f es un ciclo ya que $Orb_1(f) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Como $1 \in Orb_1(f)$, usando **b)** de la Proposición anterior

$$f = f_{1,5} \circ f_{1,4} \circ f_{1,3} \circ f_{1,2} =$$

usando **b)** de la Observación anterior

$$(f_{2,1} \circ f_{3,2} \circ f_{4,3} \circ f_{4,5} \circ f_{3,4} \circ f_{2,3} \circ f_{1,2}) \circ$$

$$(f_{2,1} \circ f_{3,2} \circ f_{3,4} \circ f_{2,3} \circ f_{1,2}) \circ (f_{2,1} \circ f_{2,3} \circ f_{1,2}) \circ f_{1,2} =$$

observemos como muchas de estas transposiciones se cancelan mutuamente

$$(f_{2,1} \circ f_{3,2} \circ f_{4,3} \circ f_{4,5} \circ f_{3,4} \circ f_{2,3}) \circ (f_{3,2} \circ f_{3,4} \circ f_{2,3}) \circ f_{2,3} =$$

$$(f_{2,1} \circ f_{3,2} \circ f_{4,3} \circ f_{4,5} \circ f_{3,4}) \circ f_{3,4} = f_{2,1} \circ f_{3,2} \circ f_{4,3} \circ f_{4,5} \qquad \square$$

Ejemplo 4. *Consideramos la permutación $f \in S_5$ del Ejemplo anterior y la transposición $f_{3,5}$. Sea g la composición de ambas*

$$g = f \circ f_{3,5} \in S_5$$

que viene dada por

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{array}.$$

Demostración: Así g se descompone en dos órbitas

$$Orb_1(g) = \{1, 2, 3\} \qquad \text{y} \qquad Orb_4(g) = \{4, 5\}.$$

Así g se puede descomponer en dos ciclos y estos en transposiciones consecutivas

$$g = (f_{1,3} \circ f_{1,2}) \circ f_{4,5} =$$

como son ciclos disjuntos conmutam

$$f_{4,5} \circ (f_{1,3} \circ f_{1,2}) =$$

usando la parte **b)** de la Observación

$$f_{4,5} \circ (f_{2,1} \circ f_{2,3} \circ f_{1,2}) \circ f_{1,2} = f_{4,5} \circ f_{2,1} \circ f_{2,3} \qquad \square$$

Observación 4. *Los ejemplos anteriores muestran que no es única la manera de descomponer una permutación como composición de transposiciones consecutivas.*

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es