ÁLGEBRA LINEAL.

Propiedades de los Determinantes.

La definición de determinante es compleja. Solo la vamos a usar en las demostraciones de **Las Propiedades de los Determinantes**. Estas propiedades son muy importante ya que permiten descubrir cuando hay independencia lineal en un conjunto de vectores. Además permiten encontrar un método efectivo de cálculo de determinantes.

Proposición 1. *Sea $A \in M_n$ una matriz cuadrada de orden n. Entonces*

a) $|A| = |A^T|$

b) *Si $\lambda \in \mathbb{R}$, y la matriz la escribimos por filas* $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_k \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$, *se tiene que*

$$\begin{vmatrix} F_1 \\ \vdots \\ \lambda F_k \\ \vdots \\ F_n \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_k \\ \vdots \\ F_n \end{vmatrix} = \lambda |A|$$

Lo mismo ocurre si multiplicamos una columna por un escalar, el escalar sale fuera del determinante.

c) *Si una fila o columna de la matriz A es toda nula, se tiene que*

$$|A| = 0.$$

Demostración: a) Tenemos que

$$|A| = \sum_{f \in S_n} (-1)^{[f]} a_{f(1),1} a_{f(2),2} \dots a_{f(n),n}.$$

Como $A^T = (b_{i,j})$, con $b_{i,j} = a_{j,i}$ para todo $i, j = 1, 2, .., n$, tenemos que

$$|A^T| = \sum_{g \in S_n} (-1)^{[g]} b_{g(1),1} b_{g(2),2} \ldots . b_{g(n),n} =$$

$$\sum_{g \in S_n} (-1)^{[g]} a_{1,g(1)} a_{2,g(2)} \ldots . a_{n,g(n)} =$$

$$\sum_{g \in S_n} (-1)^{[g]} a_{g^{-1}(1),1} a_{g^{1}(2),2} \ldots . a_{g^{-1}(n),n} =$$

como $[g] = [g^{-1}]$ (la descomposición en transposiciones de g y g^{-1} es la misma con el orden cambiado, ya que $f_{i,j}^{-1} = f_{i,j}$)

$$\sum_{g \in S_n} (-1)^{[g^{-1}]} a_{g^{-1}(1),1} a_{g^{1}(2),2} \ldots . a_{g^{-1}(n),n} =$$

y como para cada $g \in S_n$ existe una única y solo una $g^{-1} \in S_n$

$$\sum_{g^{-1} \in S_n} (-1)^{[g^{-1}]} a_{g^{-1}(1),1} a_{g^{1}(2),2} \ldots . a_{g^{-1}(n),n} = |A|.$$

b) Si multiplicamos una fila o una columna de una matriz por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i,1} & \cdots & \lambda a_{i,k} & \cdots & a_{i,n} \\ & & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \lambda a_{n,k} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{f \in S_n} (-1)^{[f]} a_{f(1),1} a_{f(2),2} \ldots \lambda a_{f(k),k} \ldots a_{f(n),n} =$$

$$\lambda \sum_{f \in S_n} (-1)^{[f]} a_{f(1),1} a_{f(2),2} \ldots a_{f(k),k} \ldots a_{f(n),n} = \lambda |A|.$$

c) Si la matriz A tiene un fila o columna toda de ceros, es como multiplicar esa fila o columna por cero. El apartado anterior nos dice que el determinante de la matriz es nulo $\square$

Proposición 2. *Sea $A \in M_n$ una matriz cuadrada de orden n.*

a) *Si se intercambian dos filas o columnas de una matriz A, entonces el determinate de la matriz resultante es igual al de la matriz A cambiado de signo. Es decir*

$$|P_{r,s} A| = -|A|.$$

b) *Una matriz que tiene dos filas o columnas iguales tiene determinante nulo.*

c) *Una matriz con dos filas o dos columnas proporcionales tiene determinante nulo.*

Demostración: Como $|A| = |A^T|$, es suficiente hacer la prueba para filas.

a) Fijadas $r < s$, escribimos

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots\cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,n} \\ & & \vdots \\ a_{s,1} & \cdots & a_{s,n} \\ & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad |B| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots\cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \\ a_{s,1} & \cdots & a_{s,n} \\ & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,n} \\ & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

donde B es la matriz A con las filas r y s intercambiadas. Así

$$|B| = |(b_{i,j})| = |B^T| = \sum_{f \in S_n} (-1)^{[f]} b_{1,f(1)} b_{2,f(2)} \ldots b_{r,f(r)} \ldots b_{s,f(s)} \ldots b_{n,f(n)} =$$

$$\sum_{f \in S_n} (-1)^{[f]} a_{1,f(1)} a_{2,f(2)} \ldots a_{s,f(r)} \ldots a_{r,f(s)} \ldots a_{n,f(n)} =$$

$$\sum_{f \in S_n} (-1)^{[f]} a_{1,f\circ f_{r,s}(1)} a_{2,f\circ f_{r,s}(2)} \ldots a_{s,f\circ f_{r,s}(s)} \ldots a_{r,f\circ f_{r,s}(r)} \ldots a_{n,f\circ f_{r,s}(n)} =$$

$$\sum_{f \in S_n} (-1)^{[f]} (-1)^{[f\circ f_{r,s}]} (-1)^{[f\circ f_{r,s}]} a_{1,f\circ f_{r,s}(1)} \ldots . a_{n,f\circ f_{r,s}(n)} =$$

vimos que $[f]$ y $[f \circ f_{r,s}]$ tienen la paridad cambiada y que $T(f) = f \circ f_{r,s} = g$ es una biyección sobre S_n,

$$\sum_{g \in S_n} -(-1)^{[g]} a_{1,g(1)} a_{2,g(2)} \ldots . a_{n,g(n)} = -|A^T| = -|A|.$$

b) Si la matriz A tiene las filas r y s iguales. Sea A y sea B la matriz A con las filas r y s intercambiadas. Como son iguales estas filas, $A = B$. Por el apartado anterior

$$|B| = -|A|.$$

Luego esto es posible solo si $|A| = 0$

c) Esto sale del apartado anterior y del apartado b) de la Proposición anterior $\square$

Proposición 3. *Sea $A \in M_n$ una matriz cuadrada de orden n. Si A tiene una fila o columna cuyas entradas son sumas de dos sumandos (por ejemplo la columna k*

$$C_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{i,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,k}+c_{1,k} \\ \vdots \\ b_{i,k}+c_{i,k} \\ \vdots \\ b_{n,k}+c_{n,k} \end{pmatrix},$$

entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & b_{1,k}+c_{1,k} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i,1} & \cdots & b_{i,k}+c_{i,k} & \cdots & a_{i,n} \\ & & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & b_{n,k}+c_{n,k} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & b_{1,k} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i,1} & \cdots & b_{i,k} & \cdots & a_{i,n} \\ & & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & b_{n,k} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & c_{1,k} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i,1} & \cdots & c_{i,k} & \cdots & a_{i,n} \\ & & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & c_{n,k} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = |A_1|+|A_2|.$$

Demostración: Hacemos la prueba por columnas. Para filas se pasa a las coorrespondiente transpuestas.

$$|A| = \sum_{f \in S_n} (-1)^{[f]} a_{f(1),1} \dots . a_{f(k),k} \dots . a_{f(n),n} =$$

$$= \sum_{f \in S_n} (-1)^{[f]} a_{f(1),1} \dots . (b_{f(k),k} + c_{f(k),k}) \dots . a_{f(n),n} =$$

usando la propiedad distributiba

$$\sum_{f \in S_n} (-1)^{[f]} \left[a_{f(1),1} \dots . b_{f(k),k} \dots . a_{f(n),n} \right] + \left[a_{f(1),1} \dots . c_{f(k),k} \dots . a_{f(n),n} \right] =$$

$$|A_1| + |A_2| \qquad \square$$

Corolario 1. *Sea $A \in M_n$ una matriz cuadrada de orden n. Si a A le sumamos a una fila otra multiplicada por un escalar o a una columna le sumamos otra multiplicada por un escalar, la matriz resultante tiene el mismo determinante que la matriz A.*

Demostración:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k}+\lambda a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,k}+\lambda a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ & & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k}+\lambda a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

según la proposición anterior

$$|A| + \lambda \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j}\cdots a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j}\cdots a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ & & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j}\cdots a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = |A|$$

ya que el un determinante con dos columnas iguales es nulo □

Observación 1. *Dada una matriz $A \in M_n$, si le aplicacmos el método de Gauss para triangularizarla, entonces el determinate de la matriz resultante es nulo si y solo si $|A| = 0$.*

Demostración: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, intercambiando filas y sumando a las filas otras multiplicadas por un escalar (el método de eliminación de Gauss) llegamos a una matriz

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & & & & b_{1,n} \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,3} & & & b_{2,n} \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & 0 & b_{k,k} & & b_{k,n} \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Por las Propiedades anteriores sabemos que $|B| = \pm|A|$. Luego un determinante es nulo si y solo si lo es el otro □

Observación 2. *Dada una matriz $B \in M_n$, cuadrada de orden n y* ***triangular superior****, es decir*

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & & & & b_{1,n} \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,3} & & & b_{2,n} \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & 0 & b_{k,k} & & b_{k,n} \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix},$$

entonces

$$|B| = b_{1,1}b_{2,2}.....b_{k,k}....b_{n,n}.$$

Demostración: Por definición

$$|B| = \sum_{f \in S_n} (-1)^{[f]} b_{f(1),1} b_{f(2),2} .... b_{f(n),n}$$

como salvo para la permutación identidad $I^{(*)}$, existe un i con $f(i) > i$, se sigue que $b_{f(i),i} = 0$. Entonces solo queda el sumando

$$|B| = b_{1,1}b_{2,2}.....b_{k,k}....b_{n,n}.$$

Falta ver que $(*)$ es cierto. Si $f \in S_n \backslash \{I\}$ y suponemos que $f(i) \leq i$, entonces si j es un punto no fijo de f, su órbita

$$Orb_j(f) = \{j, f(j), .., f^r(j)\}$$

verifica que

$$j > f(j) > f^2(j) > ... > f^r(j).$$

Ahora, sabemos que, $f^{r+1}(j) = j$ lo cual no es posible ya que hemos supuesto que

$$j = f(f^r) \leq f^r(j),$$

pero por otro lado

$$j > f^r(j).$$

LLegamos a contradicción $\square$

Observación 3. *Con las notaciones anteriores, por el Teorema del Rango, si triangularizamos A tenemos que*

$$RangA = n \quad \Leftrightarrow \quad RangB = n \quad \Leftrightarrow \quad b_{1,1} \neq 0, ..., b_{n,n} \neq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$|B| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |A| \neq 0.$$

Vamos a ver unos ejemplos de cálculos de determinantes usando las propiedades anteriores. En concreto, triangularizando las matrices.

Ejemplo 1. *Hay que calcular el determinante:*

Demostración: (triangularizando usando las propiedades anteriores)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =_{F_2-F_1;F_4-F_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

intercambiando las filas F_2 y F_3

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} =_{F_3-2F_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

donde la última igualdad se obtiene ya que el determinante tiene dos filas iguales. Deducimos que esta matriz no puede tener rango 4 o máximo □

Ejemplo 2. *Hay que calcular el determinante:*

Demostración: (triangularizando usando las propiedades anteriores)

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

restando a F_4 la fila F_1

$$3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =_{\text{cambiando } F_4 \text{ y } F_3} -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

ahora $F_3 - F_2;\ F_4 - F_2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-3)4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

haciendo $F_5 - 2F_3$

$$-12 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 1/2 \end{vmatrix} =$$

haciendo $F_5 - 3/2F_4$

$$-12 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = (-12)\frac{-1}{2} = 6.$$

Luego esta matriz tiene rango máximo igual a 5 □

Ejemplo 3. *Hay que ver que:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Demostración: Vamos a triangularizar el determinante. Si hacemos primero $F_3 - aF_2$ y después $F_2 - aF_1$, tenmos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} =$$

si hacemos $F_3 - bF_2$, se sigue

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & c(c-a)-b(c-a) \end{vmatrix} =$$

dado que el determinate es triangular

$$1 \times (b-a) \times [c(c-a) - b(c-a)] = (b-a)(c-b)(c-a) \qquad \square$$

Ejemplo 4. *Hay que ver que:*

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Demostración:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1/a & a & a^2 \\ 1/b & b & b^2 \\ 1/c & c & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} abc/a & a & a^2 \\ abc/b & b & b^2 \\ abc/c & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} \qquad \square$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`