AM PRÁCTICA 1-6 Repaso

Nombre y apellidos..

1.- Estudia la convergencia uniforme de la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^n}$ en el intervalo $[2,3]$

$$\left|\frac{1+x}{1+x^n}\right| = \frac{1+x}{1+x^n} \underset{x\in[2,3]}{\leq} \frac{1+3}{1+2^n} \leq 4\frac{1}{2^n} \quad \forall x\in[2,3]$$

COMO LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{1}{2^n} < \infty$, ES UNA SERIE ARMÓNICA, LA PRUEBA M-WEIERSTRASS NOS DICE QUE LA SERIE DE FUNCIONES CONVERGE UNIFORMEMENTE EN $[2,3]$.

2.- Calcula la transformada de Fourier de $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$$\boxed{\hat{f}(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-isx}\, dx \underset{\substack{f(x)=0 \\ \text{si } x<0}}{=} \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-isx}\, dx =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(1+is)x}\, dx \underset{\text{REGLA DE BARROW}}{=} \frac{e^{-(1+is)x}}{-(1+is)}\Bigg|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{1+is}\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-(1+is)x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} e^{-isx} = 0$$

$$\boxed{= \frac{1}{1+is}}$$

3.- Resuelve el problema $\begin{cases} \frac{x'(t)}{\operatorname{sen} t} = t x^2(t) \\ x(\frac{\pi}{2}) = -1. \end{cases}$

ESCRIBIMOS $\frac{x'(t)}{x^2(t)} = t \operatorname{sen} t$

EDO DE VARIABLES SEPARADAS. INTEGRAMOS

$$\int t \operatorname{sen} t\, dt \underset{\text{PARTES}}{=} t(-\cos t) + \int \cos t\, dt = -t\cos t + \operatorname{sen} t + k$$

$$\int \frac{x'(t)}{x^2(t)}\, dt = -\frac{1}{x(t)};$$

ASÍ $-\frac{1}{x(t)} = -t\cos t + \operatorname{sen} t + k \iff x(t) = \frac{-1}{-t\cos t + \operatorname{sen} t + k} = \frac{1}{t\cos t - \operatorname{sen} t + k}$

AHORA COMO $x(\pi/2) = -1$

$$\boxed{-1 = x(\pi/2)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + k} = \boxed{\frac{1}{k-1}} \Rightarrow k = 0.$$

LA SOLUCIÓN BUSCADA ES $x(t) = \frac{1}{t\cos t - \operatorname{sen} t}$

4.- Resuelve el problema: $\begin{cases} x''(t) + 3x'(t) = 6t + 5 \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0. \end{cases}$

① E. CARACTERÍSTICA $s^2 + 3s = s(s+3) = 0$ RAÍCES $s=0$ $s=-3$

SOLUCIÓN GENERAL DE LA HOMOGÉNEA $\boxed{x(t) = C_1 + C_2 e^{-3t}}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

② $6t+5 = e^{0t}((6t+5)\cos 0t + \operatorname{sen} 0t)$. $0+i0 = 0$ ES RAÍZ DE LA E. Caract.

PROBAMOS UNA SOLUCIÓN DEL TIPO

$$\left.\begin{aligned} y_0(t) &= t(At+B) \\ y_0'(t) &= At+B+At \\ y_0''(t) &= 2A \end{aligned}\right\}$$

ENTRANDO EN LA EDL $2A + 3(2At+B) = 6t+5$

ASÍ $\begin{cases} 6A = 6 \\ 2A + 3B = 5 \end{cases}$ LUEGO $A=1$ y $B=1$

③ SOLUCIÓN GENERAL $\boxed{y(t) = t^2 + t + C_1 + C_2 e^{-3t}}$ $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

$y'(t) = 2t + 1 - 3C_2 e^{-3t}$

④ ASÍ $\begin{matrix} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{matrix} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 1 - 3C_2 = 0 \end{cases}$ LUEGO $C_2 = \frac{1}{3}$ y $C_1 = -1/3$

LA SOLUCIÓN BUSCADA ES $\boxed{x(t) = t^2 + t - 1/3 + 1/3\, e^{-3t}}$

O

SI USAMOS LA TRANSFORMADA DE LAPLACE, COMO $x(0)=0$ y $x'(0)=0$

TENEMOS QUE: $(s^2 + 3s)\, \mathcal{L}x(s) = \mathcal{L}[6t+5](s) \underset{\text{TABLAS}}{=} \frac{6}{s^2} + \frac{5}{s}$

$\iff \boxed{\mathcal{L}x(s) = \frac{1}{s^2+3s}\left[\frac{6+5s}{s^2}\right] = \frac{1}{s^3} \cdot \frac{1}{(s+3)}(6+5s)}$ SOLUCIÓN EN TRANSFORMADAS

PROBLEMA INVERSO $\frac{6+5s}{s^3(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s+3} = \frac{(As^2+Bs+C)(s+3)+s^3D}{s^3(s+3)} =$

$= \frac{(A+D)s^3 + (3A+B)s^2 + (3B+C)s + 3C}{s^3(s+3)}$ $\iff \begin{cases} 3C = 6 \\ 3B+C = 5 \\ 3A+B = 0 \\ A+D = 0 \end{cases} \iff$ $C=2$, $B=1$, $A=-1/3$, $D=1/3$

ASÍ $\mathcal{L}x(s) = \frac{1}{s^2+3s}\left[\frac{6+5s}{s^2}\right] = -1/3\,\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{s+3} \underset{\text{TABLAS}}{=}$

$= -1/3\, \mathcal{L}[1](s) + \mathcal{L}[t](s) + \mathcal{L}[t^2](s) + \frac{1}{3}\mathcal{L}[e^{-3t}](s) =$

$= \mathcal{L}[-1/3 + t + t^2 + 1/3\, e^{-3t}](s)$. COMO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE ES INYECTIVA CONCLUIMOS QUE

$$\boxed{x(t) = -1/3 + t + t^2 + 1/3\, e^{-3t}}$$