LA TRANSFORMADA DE LAPLACE. GENERALIDADES.

La transformada de Laplace no está definida para todas las funciones. Así por ejemplo si tomamos la función $f(t) = e^{t^2}$ tenemos que

$$L[e^{t^2}](s) = \int_0^\infty e^{t(t-s)}dt \geq \int_s^\infty e^{t(t-s)}dt = \infty \text{ para todo } s > 0.$$

Sin embargo lo anterior no es inconveniente para el uso de la transformada de Laplace en problemas que nacen de la ingeniería. Las funciones que aparecen en ingeniería f están definidas en un tiempo finito $[0, T]$ y están acotadas; es decir, para cierta constante M se tiene que $|f(t)| \leq M$ para todo $t \in [0, T]$. Por lo cual

$$|Lf(s)| \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-st}dt \leq \int_0^T Me^{-st}dt < \infty \text{ para todo } s > 0.$$

Otra transformada famosa es la **transformada de Fourier**, que se estudiará en cursos superiores. Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **absolutamente integrable**, es decir que existe $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty |f(t)|dt$, se define su transformada de Fourier como la función compleja $\widehat{f}$ definida por

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i\lambda t}dt.$$

La transformada de Fourier (junto con las series de Fourier) son las herramientas esenciales de la Teoría de la Señal y de la Teoría de la Información (o de modo comprensible, tu móvil funciona gracias al **Análisis de Fourier**).

Observemos, que si f es una función absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ de modo que $f(t) = 0$ si $t < 0$, entonces

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-ist}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(is)t}dt = Lf(is).$$

Es decir la **transformada de Laplace** es una versión real de la **transformada de Fourier** para **señales causales**, aquellas que comienzan en $t = 0$.

En lo que sigue nos vamos a centrar en un conjunto de funciones, suficientemente grande para incluir las que suelen aparecen en problemas de ingeniería, de modo que no tengamos problemas a la hora de jugar con sus transformadas de Laplace. En concreto.

Definición 1. *Definimos el conjunto* $Lap(0,\infty)$ *como el conjunto de funciones* $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *que verifican que*

- *existe* $s_0>0$ *y existe* $Lf(s)$ *para todo* $s\geq s_0$*; y*
- $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st}=0$ *para todo* $s\geq s_0$.

Proposición 1. *El conjunto* $Lap(0,\infty)$ *es un* ***subespacio vectorial*** *del conjunto de todas las funciones reales definidad sobre la semirecta* $[0,\infty)$.

Demostración: Tomemos $f,g\in Lap(0,\infty)$. Sean s_0 y s_1 correspondientes a f y g respectivamente. Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Veamos que $\alpha f+\beta g\in Lap(0,\infty)$. En primer lugar

$$L[\alpha f(t)+\beta g(t)](s)=\int_0^\infty(\alpha f(t)+\beta g(t))e^{-st}dt$$

$$\alpha\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt+\beta\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt=\alpha Lf(s)+\beta Lg(s).$$

Por otro lado

$$\lim_{t\to\infty}(\alpha f(t)+\beta g(t))e^{-st}=\alpha\lim_{t\to\infty}f(t)e^{-st}+\beta\lim_{t\to\infty}g(t)e^{-st}=0,$$

donde todo lo anterior es cierto para $s\geq \max\{s_0,s_1\}$

De la prueba anterior deducimos que la **Transformada de Laplace** es un **operador lineal**.

Corolario 1. *Para todo par de funciones* $f,g\in Lap(0,\infty)$ *y* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *se tiene que*

$$L[\alpha f(t)+\beta g(t)](s)=\alpha Lf(s)+\beta Lg(s).$$

Una transformación de funciones, para que sea útil, necesita ser **inyectiva**; es decir, que transforme dos funciones distintas en dos funciones distintas. Esto ocurre con la transformada de Laplace.

Teorema 1. ***(de Lerch)*** *Sean* $f,g\in Lap(0,\infty)$ *dos funciones continuas a trozos. Si* $Lf(s)=Lg(s)$ *para todo* $s\geq s_0$*, entonces* $f=g$.

Demostración: Este resultado, que tiene incluso enunciados más generales, es difícil de probar. Algo que se escapa de nuestro nivel (ver el **Teorema de Inversión** para la transformada de Fourier en cursos superiores). Aquí vamos a dar la prueba en un caso particular, en el caso de que f y g sean continuas y de que además $f(t) \geq g(t)$ para todo t. Así si

$$Lf(s) = Lg(s) \Leftrightarrow Lf(s) - Lg(s) = L(f-g)(s) = 0,$$

se tiene que

$$\int_0^\infty e^{-st}(f-g)(t)dt = 0.$$

Como la función $e^{-st}(f-g)(t) \geq 0$ y es continua, el que su integral sea cero implica que la función también lo es, $e^{-st}(f-g)(t) = 0$ para todo t. Como $e^{-st} \neq 0$ para todo t, se deduce que $f(t) - g(t) = 0$ para todo t y por tanto $f = g\square$

Observación 1. *El que el operador transformada de Laplace sea inyectivo, lo que acabamos de ver, nos permite hacer lo siguiente. Transformar un problema de funciones en un problema de sus respectivas transformadas. Lo resolvemos en transformadas (en algunos casos es posible) y después volvemos hacia atrás (**problema inverso**) recobrando la solución ahora en funciones.*

Hemos visto que la Transformada de Laplace es inyectiva, pero hay funciones que nunca son transformadas de Laplace de alguna otra función, es decir la transformada de Laplace no es suprayectiva.

Ejemplo 1. ***No*** *existe una función f, con buenas propiedades (continua por ejemplo),de modo que $Lf(s) = 1$ o que $Lf(s) = \frac{s^2}{s^2+1}$.*

Veamos. Si

$$Lf(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = 1,$$

entonces, usando la derivada bajo el signo intergral (ver Cálculo Integral)

$$0 = \frac{dLf(s)}{ds} = \int_0^\infty \frac{df(t)e^{-st}}{ds}dt = \int_0^\infty -tf(t)e^{-st}dt.$$

Ahora por el Teorema de Lerch $tf(t) = 0$, es decir $f(t) = 0$. Lo cual es claramente una contradicción.

En el otro caso, si

$$Lf(s) = \frac{s^2}{s^2+1} = 1 - \frac{1}{s^2+1} = 1 - L[\operatorname{sen} t](s),$$

entonces, usando la linealidad de la transformada, se sigue que $L[f(t) + \operatorname{sen} t](s) = 1$. Pero antes hemos visto que no existe ninguna función cuya transformada sea precisamente la constante 1.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es