AM PRÁCTICA-9

Nombre y apellidos..

1.- Sea $G = \{[0], [2], [3], [6]\} \subset \mathbb{Z}_8$. ¿ Por qué $(G, +)$ y $(G, \times)$ no forman un grupo?

- $(G +)$ $[3]_8 + [5]_8 = [8]_8 = [0]_8$, $[5] \notin G$, el $[3]$ no tiene opuesto en $(G+)$, luego $(G+)$ no es grupo
- $(G \times)$ $[1]_8 \notin G$, no hay elemento neutro en $(G \times)$ luego no es un grupo

2.- Calcula el orden de los elementos de $(\mathbb{Z}_8^*, \times)$. ¿Cuáles son generadores de $\mathbb{Z}_8^*$?

$\mathbb{Z}_8^* = \{1, 3, 5, 7\}$

$3^2 \equiv 1 \mod 8$

$5^2 \equiv 1 \mod 8$

$7^2 \equiv 1 \mod 8$ todos los elementos tienen orden 2. $(\mathbb{Z}_8^* \times)$ no es cíclico, no tiene generadores.

3.- Dado el grupo $(G, +)$ donde $G = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{56}$ ¿Cuál es el orden máximo de los elementos del grupo? Encuentra el orden del elemento $([9]_{12}, [16]_{28}, [14]_{56})$. Justifica tu respuesta.

$mcm(12, 28, 56) = 2^3 \times 7 \times 3 = 8 \times 21 = 168$; luego el orden máximo de un elemento de $(G+)$ es 168; $(1,1,1)$ tiene ese orden

$12 = 2^2 \times 3$

$28 = 2^2 \times 7$

$56 = 2^3 \times 7$

ord 9 en $\mathbb{Z}_{12}$: $mcm(9,12) = 36$, $36 / 9 = 4$; ord 9 en $\mathbb{Z}_{12}$ es 4

ord 16 en $\mathbb{Z}_{28}$: $mcm(16, 28) = 16 \times 7 = 112$, $112 / 16 = 7$; ord 16 en $\mathbb{Z}_{28}$ es 7

ord 14 en $\mathbb{Z}_{56}$: $mcm(14, 56) = 56$, $56 / 14 = 4$; ord 14 en $\mathbb{Z}_{56}$ es 4

ord $([9]_{12}, [16]_{28}, (14)_{56})$ en $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{56}$: $mcm(4, 7, 4) = 28$

4[1]**.-** Se considera el subconjunto $G = \{1, -1, \imath, -\imath\} \subset \mathbb{C}$, donde $\imath = \sqrt{-1}$. ¿Es G con el producto un grupo? ¿Es cíclico? Encuentra un generador g ¿Cuál es el orden de g^2?

×	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

La tabla prueba que G es un grupo conmutativo

$G = \{i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1\}$ luego G es cíclico y $g = i$ es generador

$g^2 = (i^2) = -1$, el $ord(-1) = 2$ ya que $(-1)^2 = 1$.

4_2.- En general, si g es un generador de un grupo $G = \{g, g^2, \ldots, g^{n-1}, g^n = 1\}$, ¿cuál es el orden de g^k, $k < n$?

$ord(g^k) = \min\{ r : (g^k)^r = 1 = g^{kn} \}$

LUEGO SI $s = mcm(k, n)$, ENTONCES $r = \frac{s}{k} = \frac{mcm(k,n)}{k}$

5.- Calcula la lista completa de los grupos abelianos finitos (salvo isomorfismo) de orden menor o igual a 16.

5_2.- ¿Cuáles son grupos cíclicos?

Indicación: ¿Cómo son los grupos cíclicos finitos? Recuerda que todo grupo de orden primo es cíclico.

$(\mathbb{Z}_1 +), (\mathbb{Z}_2 +), (\mathbb{Z}_3 +), \ldots, (\mathbb{Z}_{15} +), (\mathbb{Z}_{16} +)$

SON GRUPOS CÍCLICOS DE ORDEN MENOR O IGUAL A 16.

5_2.- Encuentra los grupos abelianos finitos **no** cíclicos trabajando con el orden del grupo.

Indicación: Si $|G| = n \leq 16$ y n no es primo y **no** se da que $n = k_1 \times k_2$ con $m.c.d.(k_1, k_2) = 1$, entonces ...etc.

SI $|G| = 1, 2, 3, 5, 7, 11$ Ó 13, POR SER PRIMOS NOS DAN UN G CÍCLICO Y SERÍA ALGUNO DE LOS DE ARRIBA

POR EL TEOREMA DE CLASIFICACIÓN:

SI $|G| = 4 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

SI $|G| = 6 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_6$ ES CÍCLICO

SI $|G| = 8 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ O BIEN $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

SI $|G| = 9 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

SI $|G| = 10 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_{10}$ ES CÍCLICO

SI $|G| = 12 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$

SI $|G| = 14 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7 \simeq \mathbb{Z}_{14}$ ES CÍCLICO

SI $|G| = 15 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_{15}$ ES CÍCLICO

SI $|G| = 16 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$ Ó $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ Ó $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ Ó $G \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$