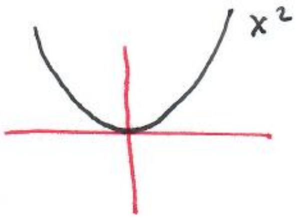
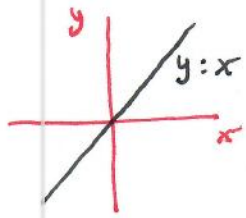
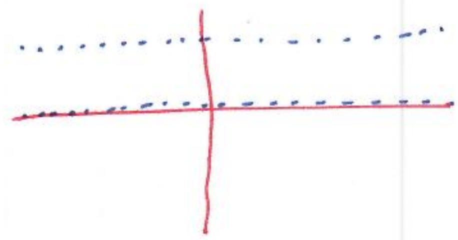
PRELIMINARES SOBRE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

1: $g(x) = x^2$ $\qquad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$







a) $h(y) \leq y$ si $0 \leq y \in \mathbb{Q}$ entonces $h(y) = y$;

Claro - $h(y) \geq 0$, si $y < 0$, entonces $y < h(y)$.

- si $y \geq 1$, como $h(y) \leq 1$, entonces $h(y)$
- si $y \in (0,1]$ y $\begin{cases} y \in \mathbb{Q} & h(y) = 0 < y \\ y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} & h(y) = 1 > y. \end{cases}$

b) $g(h(z)) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{array} \right\} = h(x)$

luego $g(h(z)) - h(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$

c) Ejercicio.

d) ¿Para qué $w \in \mathbb{R}$ $(w^2)^2 \leq w^2$? Para $w = 0$ cierto.

si $w \neq 0$, $w^4 \leq w^2 \underset{w^2 > 0}{\iff} w^2 \leq 1 \iff w \in [-1,0) \cup (0,1]$

luego para $w \in [-1,1]$ es cierta la desigualdad.

2: b) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

$x \in \mathrm{Dom}\, f$, si $1 - \sqrt{1-x^2} \geq 0$ y $(1 - x^2) \geq 0$.

- $1 - x^2 \geq 0 \iff 1 \geq x^2 \iff x \in [-1,1]$
- Ahora si $x \in [-1,1] \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \iff -1 \leq -x^2 \leq 0 \iff$
  $\iff 0 \leq 1 - x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$, así

$1 - \sqrt{1-x^2} \geq 0$, $\forall x \in [-1,1]$. $\mathrm{Dom}\, f = [-1,1]$.

3.] a) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

– Dom $f = \{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{x}{x-1}$ existe $\} = \mathbb{R} - \{1\}$

no se puede dividir por cero

– Im f, sea $a \in \mathbb{R}$, $a \in \text{Im} f \iff$ la ecuación $\dfrac{x}{x-1} = a$ tiene solución

$\iff x = (x-1)a \iff x = ax - a \iff (1-a)x = -a \iff x = \dfrac{-a}{1-a}$

$a \neq 1$

Para $a=1$, la ecuac. no tiene solución, luego

$\text{Im} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

– f es inyectiva, ya que para $a \in \text{Im} f$ sólo existe una única $x = \dfrac{-a}{1-a}$ tal que

$f\left(\dfrac{-a}{1-a}\right) = a$

– f no es sobreyectiva, ya que $\text{Im} f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \neq \mathbb{R}$

d) – Dom $f = \{ x \in \mathbb{R} :$ existe $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \} = \mathbb{R}$

– Im f observamos que si $x \geq 0$ $0 \leq \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$

para $a \in \mathbb{R}$, la ecuación $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = a \iff x = a\sqrt{x^2+1} \implies$

$x^2 = a^2(x^2+1) \implies (1-a^2)x^2 = a^2 \iff x^2 = \dfrac{a^2}{1-a^2}$, $a \neq \pm 1$

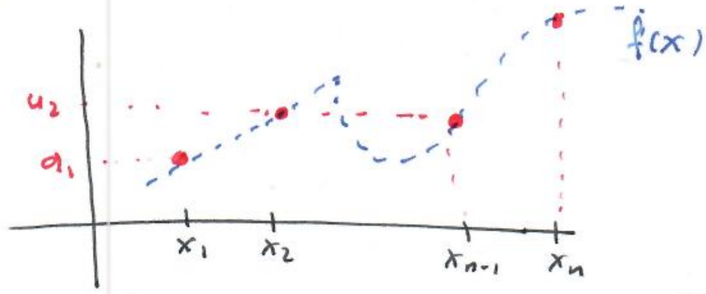
como $x^2 \geq 0$ $a^2 < 1$ (así $a \in (-1,1)$) y $x = \pm \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

la ecuación tiene solución si $a \in (-1,1)$

$\text{Im} f = (-1,1)$.

Para $a \in (-1,1)$ $\exists$ un único $x = \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ que resuelve la ecuación luego f es inyectiva, pero NO sobreyectiva

4:] SEAN $x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$ DISTINTOS; PODEMOS SUPONER QUE $x_1 < x_2 < \dots < x_n$



BUSCAMOS $f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$ POLINOMIO

TAL QUE

$$\left.\begin{aligned} f(x_1) &= a_1 = c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_{n-1} x_1^{n-1} \\ f(x_2) &= a_2 = c_0 + c_1 x_2 + \dots + c_{n-1} x_2^{n-1} \\ &\vdots \\ f(x_n) &= a_n = c_0 + c_1 x_n + \dots + c_{n-1} x_n^{n-1} \end{aligned}\right\}$$

SISTEMA DE n ECUACIONES LINEALES CON n INCÓGNITAS $c_0\ c_1 \dots c_{n-1}$

VER TEORÍA DE ÁLGEBRA LINEAL.

ESTE SISTEMA TIENE COMO DETERMINANTE DE COEFICIENTES

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

DETERMINANTE DE VANDERMONDE. NO NULO SI $x_i \neq x_j$ PARA $i \neq j$

LUEGO EL SISTEMA TIENE UNA ÚNICA SOLUCIÓN; CON ELLA SE DETERMINA f.

5:] SEA f INYECTIVA e $I \subseteq \mathrm{Dom}\, f$

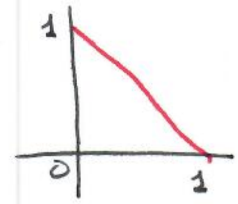
- SI $x, y \in I \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ Y $f|_I(x) = f|_I(y) \iff f(x) = f(y) \underset{f \text{ inyectiva}}{\Rightarrow}$ $x = y$; LUEGO $f|_I$ INYECTIVA.

- SI f, g SON INYECTIVAS Y PARA $x, y \in \mathrm{Dom}\, g\circ f \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ SE SIGUE QUE $g\circ f(x) = g\circ f(y) \iff g(f(x)) = g(f(y))$, $f(x), f(y) \in \mathrm{Dom}\, g$, Y POR SER g INYECTIVA $f(x) = f(y)$ Y POR SER f INYECTIVA $x = y$. LUEGO $g\circ f$ ES INYECTIVA

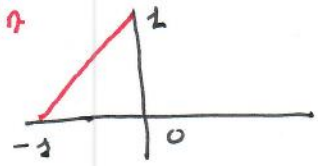
EL RESTO EJERCICIO.

6º) a) $|x|+|y|=1$

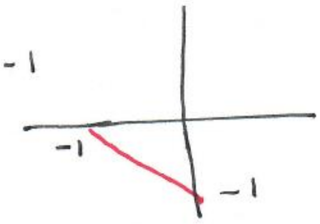
- Si $x\geq 0,\ y\geq 0 \Rightarrow x+y=1 \iff y=1-x$ recta



- Si $x<0,\ y\geq 0 \Rightarrow -x+y=1 \iff y=1+x$ recta

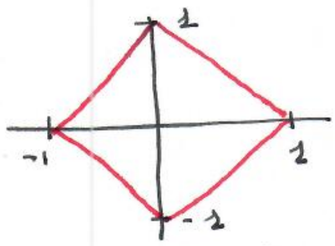


- Si $x<0,\ y<0 \Rightarrow -x-y=1 \iff$
$\iff y=-x-1$ recta



- Si $x\geq 0,\ y<0 \Rightarrow x-y=1 \iff y=x-1$ recta

Luego el conjunto de puntos es

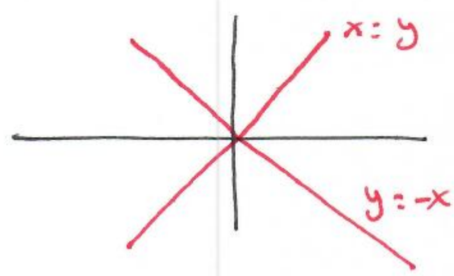


UN CUADRADO DE LADO $\sqrt{2}$.

g) $x^2+y^2=0$, $x^2, y^2\geq 0$ luego $x^2+y^2=0$
$\iff x=y=0$

h) $x^2=y^2 \iff x^2-y^2=(x-y)(x+y)=0$

$$\iff \begin{cases} (x-y)=0 \iff x=y & \text{recta} \\ \text{ó} \\ (x+y)=0 \iff -x=y & \text{recta} \end{cases}$$



7º) Sea $x, y\in \mathrm{Dom}\, f$ con $x\neq y$. Supongamos $x<y$. Entonces por ser f estrictamente monótona se sigue que $f(x)<f(y)$ ó bien $f(y)<f(x)$; en cualquier caso
$$f(x)\neq f(y).$$
Por tanto f es inyectiva.

PROBLEMA 8:

a) Si $f, g\ I \to \mathbb{R}$ son crecientes y $x, y \in I$ con $x < y$, entonces

$$f(x) < f(y)$$

y $\quad g(x) < g(y)$ luego

$$f(x) + g(x) < f(y) + g(y)$$

(claro $f(x) < f(y) \Leftrightarrow f(x) + g(x) < f(y) + g(x)$

y $g(x) < g(y) \Leftrightarrow f(y) + g(x) < f(y) + g(y)$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) + g(x) < \ldots < f(y) + g(y)$)

Así $f + g$ es creciente

b) Si $f, g\ I \to \mathbb{R}$ son crecientes y $f, g > 0$

lo de arriba no dice también que $f \cdot g$

es creciente.

Ahora en general no es cierto.:

ejemplo $f(x) = x^2$, $g(x) = -\frac{1}{x}$ $\quad x > 0$.

f, g son crecientes en $(0, \infty)$ ¡comprobar!

Ahora $f \cdot g(x) = -x$ que es decreciente en $(0, \infty)$.

c) Si f es biyectiva, existe f^{-1}.

Si además f es creciente, f^{-1} también lo es

Dem Sea $x, y \in B$ con $x < y$;

existen $a, b \in B$ con $f(a) = x$ y $f(b) = y$.

Como f es creciente, e inyectiva, necesariamente

$a < b$; así $f^{-1}(x) = a < f^{-1}(y) = b$

Por lo tanto f^{-1} es creciente.

PROBLEMA 4:

a)

+	f PAR	f IMPAR
g PAR	PAR	??
g IMPAR	??	IMPAR

- SI f, g SON PARES $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) =$
$= f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

- DE FORMA ANÁLOGA SI f y g SON IMPARES

- SEA $f(x) = |x|$ PAR y
SEA $g(x) = \operatorname{sen} x$ IMPAR.

$f+g(\pi/2) = \pi/2 + 1$ LUEGO $f+g$ NO ES NI PAR NI IMPAR.

$f+g(-\pi/2) = \pi/2 - 1$

b)

×	f PAR	f IMPAR
g PAR	PAR	IMPAR
g IMPAR	IMPAR	PAR

- SI f ES IMPAR y g PAR, ENTONCES
$f \cdot g(-x) = f(-x)\, g(-x) = -f(x)\, g(x) = -f g(x)$
LUEGO $f \cdot g$ ES IMPAR

c)

∘	f PAR	f IMPAR
g PAR	PAR	PAR
g IMPAR	PAR	IMPAR

- SI g ES PAR
$f \circ g(-x) = f(g(x)) = f \circ g(x)$
ES PAR INDEPENDIENTE DE LO QUE SEA f

- SI f y g SON IMPARES $f \circ g(-x) = f(g(-x)) =$
$= f(-g(x)) = -f \circ g(x)$. $f \circ g$ ES IMPAR

PROBLEMA 10:

SEA $f_1(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

ES UNA FUNCIÓN PAR

SEA $f_2(x) = \dfrac{-f(-x) + f(x)}{2}$

ES UNA FUNCIÓN IMPAR

CLARO $f_2(-x) = \dfrac{-f(-(-x)) + f(-x)}{2} =$

$$= \frac{-f(x) + f(-x)}{2} = -\frac{-f(-x) + f(x)}{2} =$$

$$= f_2(x).$$

ADEMAS $f_1(x) + f_2(x) = \dfrac{2f(x)}{2} = f(x).$

— · —

SUPONGAMOS QUE $f = f_1 + f_2 = f_1' + f_2'$

CON f_1 f_1' PARES Y $f_2 + f_2'$ IMPARES.

ASÍ $\underbrace{f_1 - f_1'}_{\text{PAR}} = \underbrace{f_2' - f_2}_{\text{IMPAR}}$ VER EJERCICIO ANTERIOR.

SI g ES PAR E IMPAR A LA VEZ, ENTONCES

$$g(-x) = g(x) = -g(x) \Rightarrow g(x) = 0.$$

LUEGO $f_1 - f_1' = 0 \Rightarrow f_1 = f_1'$

Y $f_2' - f_2 = 0 \Rightarrow f_2 = f_2'.$ — · —

PROBLEMA 11:

SI f ESTA ACOTADA $\Leftrightarrow$ f ES ACOTADA SUPERIORMENTE E INFERIORMENTE $\Leftrightarrow$

$\exists\, M, m \in \mathbb{R}$ TAL QUE $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathrm{Dom}\, f.$

SEA $K = \max\{m, |m|, M, |M|\}$ ENTONCES

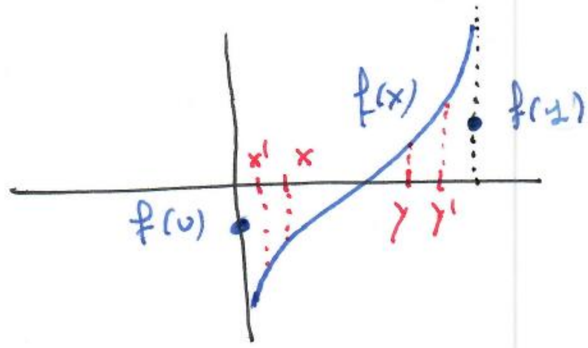
$$|f(x)| \leq K \quad \forall x \in \mathrm{Dom}\, f$$

AL CONTRARIO SI $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathrm{Dom}\, f$, ENTONCES

$-M \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathrm{Dom}\, f$, LO QUE PRUEBA QUE f ESTA ACOTADA INFERIOR Y SUPERIORMENTE Y POR TANTO ACOTADA.

PROBLEMA 12: SI, SI NO 1-1 CONTINUA

POR EJEMPLO



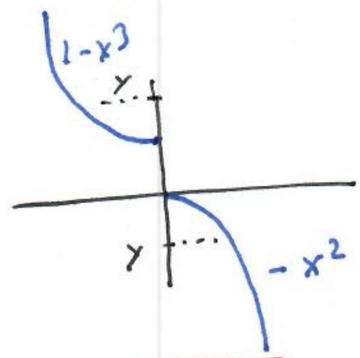
PROBLEMAS 13:

a) $f(x) = x^3 + 1$

$y = x^3 + 1$ DESPEJAMOS LA x.

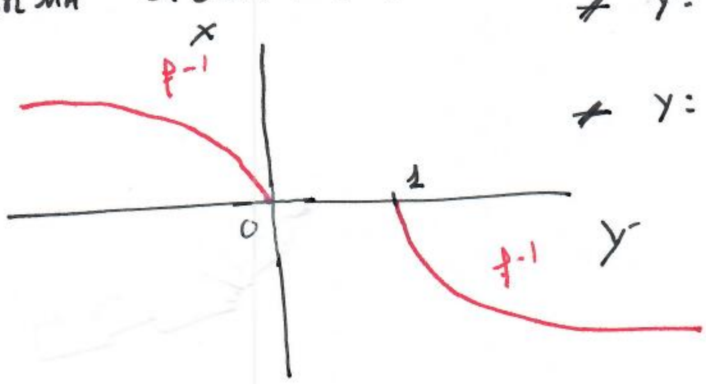
$x^3 = y - 1$ y $x = \sqrt[3]{y-1} = f^{-1}(y)$

c) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



DE FORMA GEOMÉTRICA

* $y = -x^2 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{-y}}$ si $y < 0$
* $y = 1 - x^3 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{1-y} \quad y > 1}$



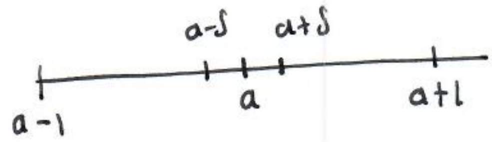
PROBLEMA 14:]

a) $f(x) = x^4$ y $\rho = a^4$

$$|x^4 - a^4| \leq |(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)| \leq$$

$$\leq |x-a|\,|x+a|\,|x^2 + a^2| \leq$$

$\boxed{\text{si } x \in [a-1, a+1]}$



$$\leq |x-a|\,(2r\,2r^2)$$

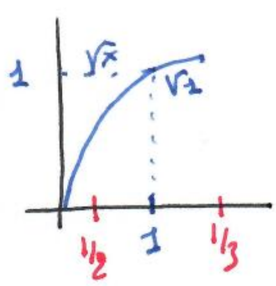
$r = \max |a-1|, |a+1|.$

Sea $\delta = \min \{1, \frac{\varepsilon}{4r^3}\}$

entonces si $x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow$

$$|x^4 - a^4| \leq |x-a|\,4r^3 \leq \delta\, 4r^3 < \frac{\varepsilon}{\cancel{4r^3}}\cancel{4r^3} = \varepsilon.$$

e) $f(x) = \sqrt{x}$ $a = 1$ $\rho = 1$



$$|\sqrt{x} - 1| = \frac{|\sqrt{x} - 1|\,|\sqrt{x}+1|}{|\sqrt{x}+1|} =$$

$$= \frac{|x-1|}{|\sqrt{x}+1|} \leq |x-1|.$$

$|\sqrt{x}+1| > 1$ para $x > 0$

Si tomamos $\delta = \varepsilon$. Hemos terminado

16:] $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

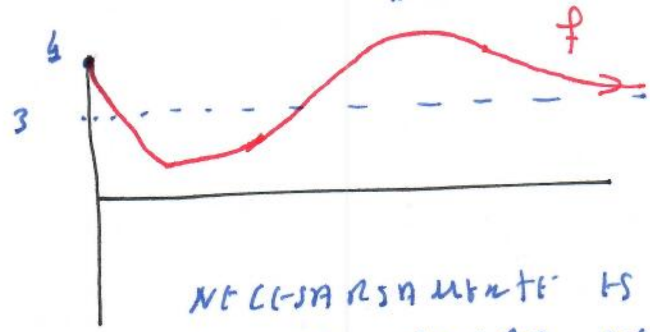
$\Leftrightarrow$ $\forall M < 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $0 < a - x < \delta$, entonces

$f(x) < M$

La respuesta correcta es la c)

PROBLEMA 17:] $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua, $f(0) = b$

y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$



f no es creciente
f no es convexa
f no es cóncava

Necesariamente es acotada, por exclusión. La prueba necesita algo más de teoría:

TEOREMA: Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua $\Rightarrow$ f acotada

$\forall x > M \Rightarrow |f(x) - 3| < 1/2$

Así para $\varepsilon = 1/2$ $\exists M > 0$ tal que $\forall x > M$ $\Rightarrow |f(x)-3| < 1/2$ (puesto que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$) así $f|_{(M,\infty)}$ está acotada

Como $f: [0, M] \to \mathbb{R}$ es continua, también está acotada. Luego toda la f lo está.

PROBLEMA 18:]

a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = y \in \mathbb{R}$ con $f(x_0) = y$ $\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$ con $f(x_0) = y$

Así $|f(x_0) - y| = 0 < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$ (incluimos $x = x_0$)

$\Rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$.

PROBLEMA 19:] a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$ $x_0 = 1$

$f(1) = 1^2 = 1$; observamos que $2 - 1 = 1$.

Para $\varepsilon > 0$ $|x^2 - 1| = |x-1||x+1| \underset{x\in[0,1]}{\le} 2|x-1| \le \varepsilon$ $\delta_1 < \varepsilon/2$

$|2 - x - 1| = |1 - x| < \varepsilon$ $\delta_2 < \varepsilon$

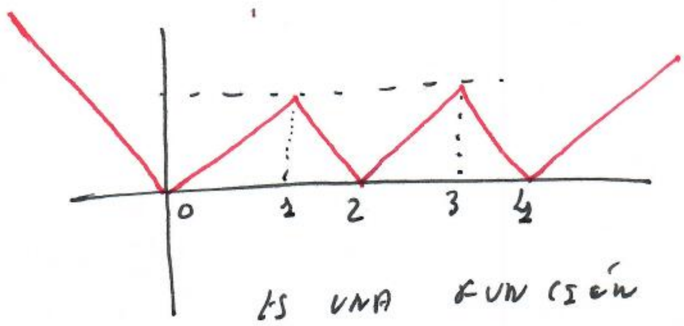
Luego si $\delta < \min\{\varepsilon/2, \varepsilon\}$ y para todo $x \in (1-\delta, 1+\delta)$

$|f(x) - 1| < \varepsilon$. Así f es continua en $x = 1$

Con más teoría, algo más que la definición, estos ejercicios son mucho más sencillos

PROBLEMA 20:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{si } x \in [1,2] \\ x-2 & \text{si } x \in (2,3] \\ 4-x & \text{si } x \in (3,4] \\ x-4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$



Es una función con 3 raíces $\{0, 2, 4\}$ que es continua; la prueba como el ejercicio anterior (con más teoría es trivial)

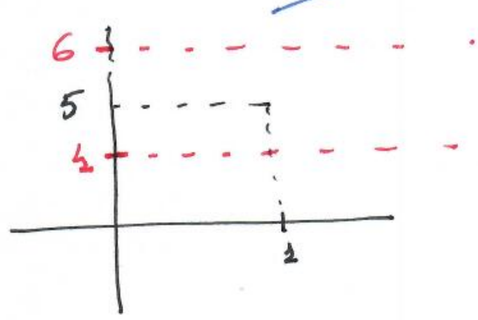
No es un polinomio ya que si $p(x)$ polinomio verifica que $p(0) = p(2) = p(4) = 0$ entonces

$$p(x) = x(x-2)(x-4)\,Q(x) \qquad Q(x) \text{ polinomio}$$

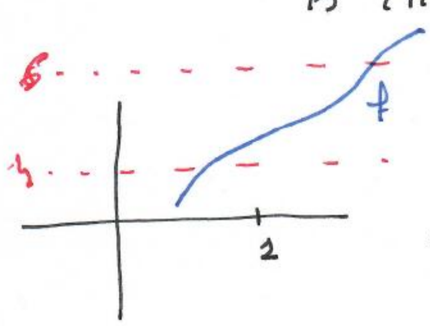
Así $p(x) \neq f(x)$.

PROBLEMA 21:

$f(x) = x^2 + 3x + 1$ $\qquad f(1) = 1 + 3 + 1 = 5$



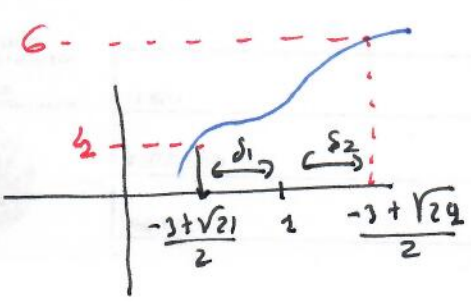
Si $0 < x < y$
entonces $x^2 < y^2$
y $3x < 3y$
y $1 \leq 1$
luego $f(x) < f(y)$; así f es creciente en $[0, \infty)$.



f creciente; también por ser monótona inyectiva en $(0, \infty)$

Resolvemos $x^2 + 3x + 1 = 4 \iff x^2 + 3x - 3 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+12}}{2}; \quad \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} > 0$$

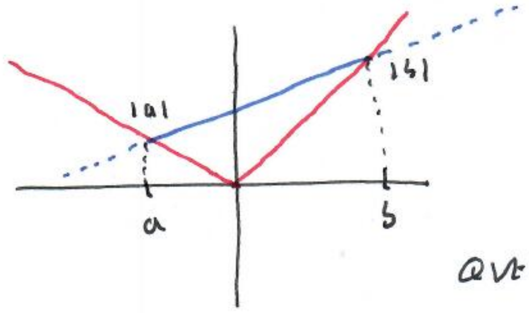


Resolvemos $x^2 + 3x + 1 = 6 \iff x^2 + 3x - 5 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+20}}{2}; \quad x = \frac{-3 + \sqrt{9+20}}{2} > 0$$

Se toma $\delta = \min\left\{ \left| \frac{-3+\sqrt{21}}{2} - 1 \right|, \left| \frac{-3+\sqrt{29}}{2} - 1 \right| \right\}$.

PROBLEMA 22:) EJEMPLO $f(x) = |x|$



Geométricamente la cuerda que une los puntos $(a, |a|)$ y $(b, |b|)$ queda por encima de la gráfica de f

PROBLEMA 23:) ¿ $\lim_{x\to\infty} x^2 + x + 1 = \infty$?

Si $x > 1$ $\quad x^2 + x + 1 \geq x^2 \geq x$

Luego $\forall M > 0$ si $x > M+1$ se sigue que

$$f(x) = x^2 + x + 1 \geq x > M+1 > M.$$

PROBLEMA 24:) $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$

Para $x_n = \dfrac{1}{\pi/2 + 2n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\quad f(x_n) = \operatorname{sen}(\pi/2 + 2n\pi) = 1$

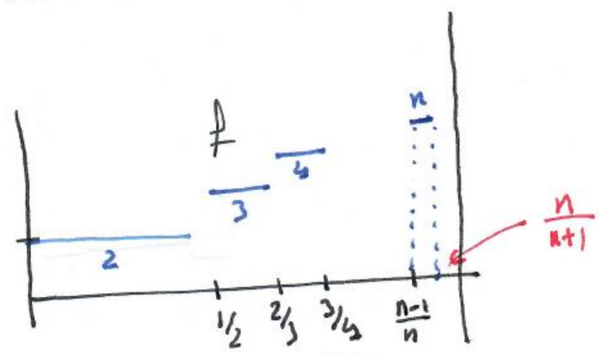
Para $y_n = \dfrac{1}{\pi + 2n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\quad f(y_n) = \operatorname{sen}(\pi + 2n\pi) = 0$

Así $\forall \delta > 0$ si $|x| < \delta$ no podemos asegurar que $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ se acerque a ningún número de forma única

PROBLEMA 25:) a)

$$[0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right)$$

$$f|_{[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1})} \equiv n.$$



$\frac{n-1}{n} \uparrow 1$, función creciente

y f no puede ser continua en $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

b) Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\delta > b - a$ $\quad n$ existe por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$. Si las discontinuidades de f fuesen infinitas, podríamos encontrar $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$, con $x_j \in [0,1]$ $j = 1 \dots n+1$ y f discontinua en dichos.

$$\sum_{j=1}^{n} |x_{j+1} - x_j| > n\delta > |a - b|.$$

¡Lo cual no es posible! claramente.