EXAMEN AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS.

13 de Enero de 2025.

1.- Se considera la serie de funciones $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$.

A) ¿Converge uniformemente la serie en el intervalo $[-a,a]$ con $a \in (0,1)$?

B) ¿Converge uniformemente la serie en el intervalo $[-1,1]$?

Justifica tus respuestas.

2.- Calcula la transformada de Fourier de $f(x) = \begin{cases} |\operatorname{sen} x| & \text{si} \quad x \in [-\pi,\pi] \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

3.- Resuelve el problema

$$\begin{cases} u''(t) - u'(t) - 2u(t) = t \\ u(0) = 1,\ u'(0) = -1 \end{cases}$$

siguiendo el método que estimes más conveniente.

4.- Resuelve el sistema de congruencias

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 3 \mod 7 \\ 2x \equiv 5 \mod 11 \end{cases}$$

5.- Determina todos los grupos abelianos de orden 360 salvo isomorfismos. Da en cada uno de ellos un elemento con el máximo orden posible. Justifica tus respuestas.

6.- Sea $p \in \mathbb{Z}_7[x]$ el polinomio $p(x) = x^2 + 5$.

A) Halla el cardinal del anillo cociente $\frac{\mathbb{Z}_7[x]}{(p)}$ y determina si este anillo es o no un cuerpo.

B) Encuentra el inverso respecto del producto, si existe, de la clase de $q(x) = x^2 + 4$ en $\frac{\mathbb{Z}_7[x]}{(p)}$

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

Revisión del examen:

.- **Presencial .**

.- Las soluciones del examen se podrán consultar en: http://blogs.mat.ucm.es/cruizb/inicio/docencia-curso-22-23/ampliacion-de-matematicas/examenes-de-am/

La revisión del examen se efectuará el día 21 de Enero a las 13h en el aula 8. No es obligatorio solicitar la revisión.

PROBLEMA 1:

SEA $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$

A] SI $x \in [-a, a]$ CON $a \in (0,1)$ $(\Rightarrow 0 < a^2 < 1)$

$|(-1)^k x^{2k}| \leq (a^2)^k$ PARA TODO $x \in [-a,a]$ Y COMO

$\sum_{n=0}^{\infty} (a^2)^k \underset{\downarrow}{=} \frac{1}{1-a^2}$, POR LA PORVERSA

SERIE GEOMÉTRICA

M-WEIERSTRASS LA SERIE DE FUNCIONES CONVERGE UNIFORMEMENTE EN $[-a, a]$

B] LA RESPUESTA ES NO. PARA $x = 1$

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (1)^{2k} = \lim_{N \to \infty} [\underbrace{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots}_{N\text{-VECES}}]$, ESTE LÍMITE

NO EXISTE, ES DECIR, NO EXISTE EL LÍMITE PUNTUAL Y POR TANTO NO PUEDE EXISTIR EL LÍMITE UNIFORME.

PROBLEMA 2:

SEA $f(x) = \begin{cases} |\operatorname{sen} x| & \text{SI } x \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{EN OTRO CASO} \end{cases}$; ASÍ

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen} x| (\cos \lambda x - i \operatorname{sen} \lambda x) dx =$$

$$\underset{\substack{|\operatorname{sen} x| \\ \text{PAR}}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen} x| \cos \lambda x \, dx \underset{\substack{|\operatorname{sen} x| \\ \text{PAR}}}{=} 2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos \lambda x \, dx \overset{(*)}{=} \boxed{\frac{2}{1-\lambda^2}(1 + \cos \lambda \pi)}$$

$$(*) \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos \lambda x \, dx \underset{\text{PARTES}}{=} \underbrace{\cancel{\operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{\lambda} \Big|_0^{\pi}}}_{\text{SE ANULA}} - \int_0^{\pi} \cos x \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{\lambda} dx \underset{\text{PARTES}}{=}$$

$$= \cos x \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2} dx \quad \text{DESPEJANDO}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos \lambda x \, dx = \frac{\cancel{\lambda^2}}{\lambda^2 - 1} \cdot \left(\frac{\cos x \cos \lambda x}{\cancel{\lambda^2}} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{(1 + \cos \lambda \pi)}{1 - \lambda^2}$$

PROBLEMA 3:

$$\begin{cases} u'' - u' - 2u = t \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = -1 \end{cases}$$

EC. HOMOGÉNEA $u'' - u' - 2u = 0$; EC CARACTERÍSTICA

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \qquad \lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2 \text{ ó } -1$

ASÍ $x(t) = A e^{2t} + B e^{-t}$ $A, B \in \mathbb{R}$, ES LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O HOMOGÉNEA.

SOLUCIÓN PARTICULAR COMO $f(t) = t = e^{0t} \cos 0t + e^{0t} \operatorname{sen} 0t$

Y $\lambda = 0$ NO ES RAÍZ DE LA EC CARACTERÍSTICA, PROBAMOS UNA SOLUCIÓN DEL TIPO

$f_0(t) = At + B$

$f_0'(t) = A$ Y ENTRANDO EN LA E.D.O

$t = -A - 2At - 2B$; LUEGO $-2At = t$ Y $-A - 2B = 0$

POR TANTO $A = -1/2$ Y $B = 1/4$; $f_0(t) = -1/2\, t + \frac{1}{4}$

SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O

$$u(t) = A e^{2t} + B e^{-t} - 1/2\, t + \frac{1}{4}$$

$$u'(t) = 2A e^{2t} - B e^{-t} - 1/2$$

PROBLEMA DE CAUCHY.

$$1 = u(0) = A + B + \frac{1}{4}$$

$$-1 = u'(0) = 2A - B - 1/2$$

SUMANDO $0 = 3A - \frac{1}{4}$ ASÍ $A = \frac{1}{12}$

Y POR TANTO $1 = u(0) = \frac{1}{12} + B + \frac{1}{4}$ LUEGO $B = 2/3$

LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ES.

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{12} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{-t} - 1/2\, t + \frac{1}{4}}$$

PROBLEMA 3

$$u''(t) - u'(t) - 2u(t) = t$$
$$u(0) = 1 \quad , \quad u'(0) = 1$$

USANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$\mathcal{L}[u'' - u' - 2u](s) = \mathcal{L}[t](s)$$

ASÍ

$$\mathcal{L}[u''](s) - \mathcal{L}[u'](s) - 2\mathcal{L}[u](s) = \frac{1}{s^2}$$

Y POR LAS PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMADAS

$$s^2 \mathcal{L}[u](s) - s + 1 - [s\mathcal{L}[u] - 1] - 2\mathcal{L}[u](s) =$$

$$= [s^2 - s - 2]\mathcal{L}[u](s) - s + 2 = \frac{1}{s^2}.$$

DESPEJANDO

$$\boxed{\mathcal{L}[u](s) = \left(\frac{1}{s^2} + s - 2\right)\frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{s^3 - 2s^2 + 1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{s^3 - 2s^2 + 1}{s^2(s-2)(s+1)}}$$

SOLUCIÓN DE TRANSFORMADAS

PROBLEMA INVERSO

$$\frac{s^3 - 2s^2 + 1}{s^2(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s+1} = \quad (*)$$

DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

$$\frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{12}\frac{1}{s-2} + \frac{2}{3}\frac{1}{s+1} = \mathcal{L}[u](s)$$

USANDO EN LAS TABLAS

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}}$$

SOLUCIÓN.

(*). $s^3 - 2s^2 + 1 = As(s-2)(s+1) + B(s-2)(s+1) + Cs^2(s+1) + Ds^2(s-2) =$

$= A(s^3 - s^2 - 2s) + B(s^2 - s - 2) + C(s^3 + s^2) + D(s^3 - 2s^2) =$

$= s^3[A + C + D] + s^2(-A + B + C - 2D) + s(-2A - B) - 2B$

ASÍ

$$1 = A + C + D$$
$$-2 = -A + B + C - 2D$$
$$0 = -2A - B$$
$$1 = -2B$$

LUEGO $\boxed{B = -1/2}$ y $\boxed{A = \frac{1}{4}}$

Y TENEMOS QUE $1 = \frac{1}{4} + C + D \iff \frac{3}{4} = C + D$

$-2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + C - 2D \qquad -\frac{5}{4} = C - 2D$

RESTANDO LA 2ª EC A LA PRIMERA $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 3D \Rightarrow \boxed{D = \frac{2}{3}}$

Y POR TANTO $\boxed{C = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}}$

Problema 4:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 3 \mod 7 \\ 2x \equiv 5 \mod 11 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 3 \mod 7 \\ x \equiv 30 \equiv 8 \mod 11 \end{cases}$$

como $[2]^{-1}_{11} = 6$; 3, 7 y 11 no tienen divisores comunes

Usando el teorema chino del resto

$$x \equiv 1 \times 77 \times [77]^{-1}_3 + 3 \times 33 \times [33]^{-1}_7 + 8 \times 21 \times [21]^{-1}_{11}$$

$$\equiv 77 \times [2]^{-1}_3 + 99 \times [5]^{-1}_7 + 168 \times [10]^{-1}_{11} \equiv$$

$$\equiv 77 \times 2 + 99 \times 3 + 168 \times 10 \equiv 154 + 297 + 1680 \equiv 2131 \mod 3 \times 7 \times 11$$

mod 231

$$2131 \,\underline{|\,231} \quad 052 \quad 9$$

$$\equiv 52 \mod 231$$

Comprobación $\begin{cases} 52 \,\underline{|\,3} \quad 22 \quad 17 \quad 1 \\ 52 \,\underline{|\,7} \quad 3 \quad 7 \\ 52 \,\underline{|\,11} \quad 8 \quad 4 \end{cases}$

Problema 5:

$$360 = 6^2 \times 10 = 2^2 \times 3^2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

El teorema de representación de grupos abelianos nos dice que un grupo G abeliano se puede escribir como

$$G \cong \mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{d_s} \quad \text{con } d_1 > 1,\ d_i \mid d_{i+1} \ \forall i = 1 \dots s$$

y tal que $d_1 \times d_2 \times \dots \times d_s = |G|$

Así $360 = \begin{cases} 360 & s = 1 \\ 2 \times 180 & s = 2 \\ 3 \times 120 & s = 2 \\ 6 \times 60 & s = 2 \\ 2 \times 2 \times 90 & s = 3 \\ 2 \times 6 \times 30 & s = 3 \end{cases}$

Los grupos abelianos de 360 elementos son

$(\mathbb{Z}_{360}, +)$ — $1 \in \mathbb{Z}_{360}$ y $\operatorname{ord} 1 = 360$ orden máximo

$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{180}, +)$ — $(1,1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{180}$ y $\operatorname{ord}(1,1) = 180$ "

$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{120}, +)$ — $(1,1) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{120}$ y $\operatorname{ord}(1,1) = 120$ "

$(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{60}, +)$ — $(1,1) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{60}$ y $\operatorname{ord}(1,1) = 60$ "

$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{90}, +)$ — $(1,1,1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{90}$ y $\operatorname{ord}(1,1,1) = 90$ "

$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{30}, +)$ — $(1,1,1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{30}$ y $\operatorname{ord}(1,1,1) = 30$ orden máximo.

PROBLEMA 6:-

$p(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ con $p(x) = x^2+5$

A) Como $p(3) = 9+5 = 14 \equiv 0 \mod 7$, se sigue que

$p(x) = (x-3)(x-4)$ es reducible en $\mathbb{Z}_7[x]$

por tanto $\mathbb{Z}_7[x]/p$ <u>no</u> puede ser un cuerpo,

es un anillo conmutativo con unidad.

B) $\mathbb{Z}_7[x]/x^2+5$ tiene 49 elementos.

$x^2+4 \in \mathbb{Z}_7[x]/x^2+5$

y $mcd(x^2+5, x^2+4) = 1$ claro $x^2+5 = 1\times(x^2+4)+1$

por lo anterior x^2+4 tiene inverso en $\mathbb{Z}_7[x]/p$

este inverso $(x^2+4)^{-1} = 6$ ya que

$0 = x^2+5 = 1\times(x^2+4)+1$

así $-1 = 1\times(x^2+4)$

$6 = 1\times(x^2+4)$ y como $6^{-1} \equiv 6 \mod 7$

es decir $\boxed{1 = 6\times(x^2+4)}$