ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD.

Antes de comenzar veamos otra forma de escribir los números de un intervalo cerrado.

Lema. 1.

$$[a, b] = \{c \in \mathbb{R} \ : \ c = \alpha a + (1-\alpha)b, \quad \textit{para algún} \quad \alpha \in [0,1]\,\}$$

Si $c = \alpha a + (1-\alpha)b$, para $\alpha \in [0,1]$, decimos que c es una **combinación convexa** de a y b.

Demostración: Si $c = \alpha a + (1-\alpha)b$, entonces $c = b - \alpha(b-a) \leq b$. Por otro lado $c = a + (1-\alpha)(b-a) \geq a$, luego $c \in [a,b]$.

Por otro lado si $c \in [a, b]$

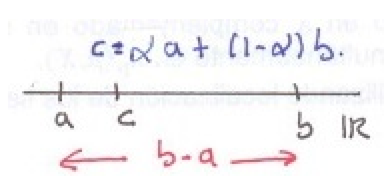

FIGURA 1. c entre a y b.

entonces

$$c = \frac{b-c}{b-a}a + \frac{c-a}{b-a}b.$$

Es claro que $0 \leq \dfrac{b-c}{b-a} \leq 1$ y además

$$1 - \frac{b-c}{b-a} = \frac{c-a}{b-a}$$

$\square$

Con la noción de combinación convexa es más fácil entender los conceptos de **convexidad** y **concavidad** de una función.

Definición. 1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que la función es* ***convexa*** *en $[a,b]$ si para todo $x, y \in [a,b]$ con $x < y$ se tiene que*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

Observemos que

$$\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y) = \alpha(f(x)-f(y))+f(y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}(\alpha(x-y))+f(y)$$

$$= \frac{f(x)-f(y)}{x-y}([\alpha x + (1-\alpha)y] - y) + f(y) = r(\alpha x + (1-\alpha)y),$$

donde r es la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$.

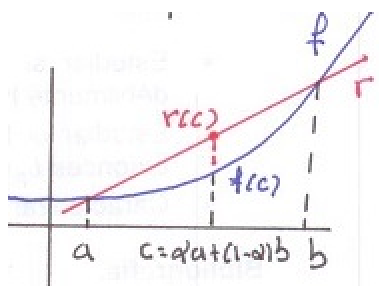

FIGURA 2. Función convexa.

Observación. 1. *Un función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es convexa si y solo si su gráfica en el intervalo $[x,y]$ queda por debajo de la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$, para todo $x, y \in [a,b]$ con $x < y$.*

Definición. 2. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que la función es* ***concava*** *en $[a,b]$ si para todo $x, y \in [a,b]$ con $x < y$ se tiene que*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

Obsevemos que

$$\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y) = \alpha(f(x)-f(y))+f(y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}(\alpha(x-y))+f(y)$$

$$= \frac{f(x)-f(y)}{x-y}([\alpha x + (1-\alpha)y] - y) + f(y) = r(\alpha x + (1-\alpha)y),$$

donde r es la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$.

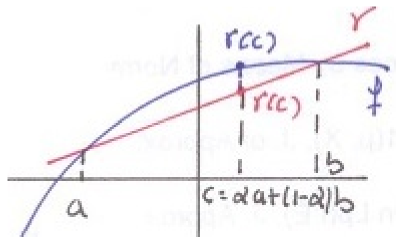

FIGURA 3. Función concava.

Observación. 2. *Un función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es concava si y solo si su gráfica en el intervalo $[x, y]$ queda por encima de la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$, para todo $x, y \in [a, b]$ con $x < y$.*

Otra forma de caracterizar la convexidad y concavidad es a través de los crecimientos de las pendientes de la cuerdas que unen puntos de la gráfica de la función. En concreto.

Proposición. 1. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función sobre un intervalo o semirecta I.*

A): *Son equivalentes:*

- *f es **convexa** en I;*
- *Para todo $a, x, b \in I$ con $a < x < b$ se tiene que*
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
o equivalentemente
$$\frac{f(b) - f(x)}{b - x} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

B): *Son equivalentes:*

- *f es **cóncava** en I;*
- *Para todo $a, x, b \in I$ con $a < x < b$ se tiene que*
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
o equivalentemente
$$\frac{f(b) - f(x)}{b - x} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración: Veamos **A)** el resto queda como ejercicio. Para $a < x < b$, por ser f convexa el valor $f(x)$ queda por debajo del valor correspondiente de la recta que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Así
$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Reordenando esta desigualdad, dado que $x-a>0$
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$
El recíproco es evidente.

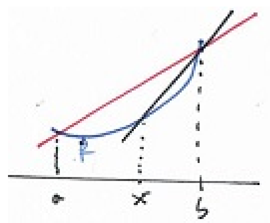

FIGURA 4. Función convexa.

Obervemos que la recta r que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ se puede escribir de dos modos
$$r(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b),$$
de aquí si f es convexa
$$f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b).$$
Reordenando esta desigualdad, dado que $x-b<0$
$$\frac{f(b)-f(x)}{b-x} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$
El recíproco es evidente. $\square$

Como en el caso del crecimiento, una función puede ser concava en parte de su dominio y convexa en la otra parte. Según vamos aver, la forma de descubrir la convexidad de la función es mirar el signo de su derivada segunda, siempre que ésta exista.

Proposición. 2. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función sobre un intervalo o semirecta I.*

- **A):** *Si f es* ***convexa*** *y derivable en I, entonces f' es una función creciente en I.*
- **B):** *Si f es* ***cóncava*** *y derivable en I, entonces f' es una función decreciente en I.*

Demostración: Veamos A). Sea $a \in I$ y consideramos $a < a+h_1 < a+h_2$. Usando la Proposición anterior para f convexa y $a=a$, $x=a+h_1$ y $b=a+h_2$, tenemos que
$$\frac{f(a+h_1)-f(a)}{h_1} \leq \frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2}.$$

Es decir, las pendientes $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ decrecen cuando $h>0$ decrece a cero. Así como f es derivable en a y por definición de derivada, tenemos

$$f'(a)=f'(a^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\leq\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

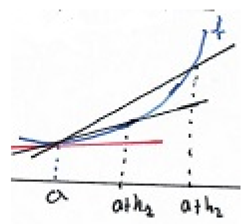

Figura 5. Función convexa.

Por otro lado, para $b+h_2<b+h_1<b$, la Proposición anterior nos dice que

$$\frac{f(b)-f(b+h_2)}{-h_2}\leq\frac{f(b)-f(b+h_1)}{-h_1}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{f(b+h_2)-f(b)}{h_2}\leq\frac{f(b+h_1)-f(b)}{h_1}.$$

Es decir, las pendientes $\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$ crecen cuando $h<0$ crece a cero. Así como f es derivable en b y por definición de derivada, tenemos

$$f'(b)=f'(b^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}\geq\frac{f(b+h)-f(b)}{h}.$$

Ahora dados $a,b\in I$, con $a<b$, se tiene que

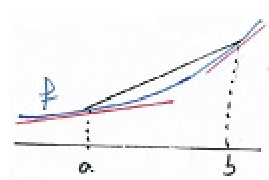

Figura 6. Función convexa.

$$f'(a)\leq\frac{f(a+(b-a))-f(a)}{b-a}=\frac{f(b+(a-b))-f(b)}{a-b}\leq f'(b).$$

Lo que prueba que f' es creciente $\square$

Corolario. 1. *Sea $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función sobre un intervalo o semirecta I de modo que existe f''.*

a): *Si f es convexa, entonces $f'' \geq 0$.*

b: *Si f es concava, entonces $f'' \leq 0$.*

Demostración: **a)** Claro, si f es convexa y derivable, la Proposición anterior nos dice que f' es creciente, por tanto su derivada f'' es positiva $\square$

Para ver el recíproco de la última Proposición necesitamos el siguiente Lema, el cuál obviamente tiene una versión análoga para funciones con f' decreciente.

Lema. 2. *Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función sobre un intervalo, derivable y con f' creciente. Entonces si $a, b \in I$ con $f(a) = f(b)$ se tiene que*

$$f(x) \leq f(a) \qquad \textit{para todo} \qquad x \in [a, b].$$

Demostración:

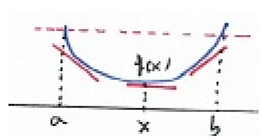

FIGURA 7. Función con f' creciente.

Supongamos que existe un $x \in (a, b)$ con $f(x) > f(a)$. Como f es continua en $[a, b]$, alcanza un máximo en un punto $x_0 \in (a, b)$ y por el Teorema de Rolle $f'(x_0) = 0$. Ahora por el Teoream del Valor Medio, existe $x_1 \in (a, x_0)$ de modo que

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} > 0;$$

lo que contradice que f' sea creciente $\square$

Claramente se tiene un Lema análogo para f' decreciente.

Proposición. 3. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función sobre un intervalo o semirecta I con f derivable.*

A): *Si f' es creciente, entonces f es convexa.*

B): *Si f' es decreciente, entonces f es cóncava.*

Demostración: Veamos **A)**. Fijamos $a, b \in I$, con $a < b$. Para $x \in (a, b)$ consideramos la función

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

Se tiene que $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, por tanto g' es creciente. Además

$$g(a) = g(b) = 0.$$

Así por el Lema anterior $g(x) \leq 0$ para todo $x \in (a,b)$, es decir

$$f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a);$$

la función queda por debajo de la cuerda que une $(a, f(a))$ y (b,f(b)). Luego f es convexa $\square$

Todo lo anterior se resume en el siguiente Teorema.

Teorema. 1. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función sobre un intervalo o semirecta I con f derivable.*

A):
- *f es convexa en I si y solo si f' es creciente.*
- *Si existe f'' y $f'' \geq 0$ en I, entonces f es **convexa** en I.*

b:
- *f es cóncava en I si y solo si f' es decreciente.*
- *Si existe f'' y $f'' \leq 0$ en I, entonces f es **cóncava** en I.*

Demostración: A) El siguiente dibujo nos debe convencer de que la convexidad es equivalente al crecimiento de la derivada.

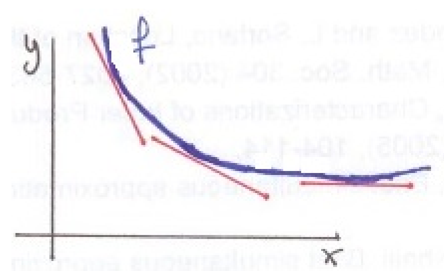

FIGURA 8. Demostración sin palabras.

La prueba formal es un poco más engorrosa como acabamos de ver.

Ahora si existe la derivada segunda f'' y es positiva, entonces la función derivada f' es creciente y por lo anterior la función es convexa.

El apartado **B)** es análogo al anterior $\square$

Ejemplo. 1. *Sea $f(x) = x^2$. Así $f'(x) = 2x$. Luego la función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, \infty)$. Además $f''(x) = 2 > 0$, luego la función es convexa en toda la recta.*

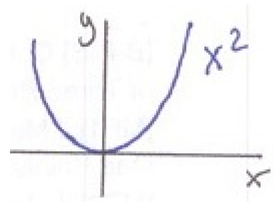

FIGURA 9. Función convexa.

Ejemplo. 2. *Sea* $f(x) = \sqrt{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})}$, *donde* $x \in [0, a]$. *Esta función es decreciente y cóncava.*

Demostración: Derivando

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}} \frac{2xb^2}{a^2}.$$

Esta derivada es negativa si $x \in (0, a)$ y por tanto la función decrece. Obsevemos que $f'(0) = 0$ y que $\lim_{x \to a^-} f'(x) = -\infty$.

Volviendo a derivar

$$f''(x) = -\frac{b^2}{a^2} \frac{\sqrt{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})} - x(\frac{-1}{2\sqrt{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}} \frac{2xb^2}{a^2})}{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}$$

$$= -\frac{b^2}{a^2} \left[\frac{1}{\sqrt{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}} + \frac{b^2x^2}{a^2(b^2(1-\frac{x^2}{a^2}))^{\frac{3}{2}}} \right]$$

que es negativo si $x \in (0, a)$. Por tanto la función es cóncava □

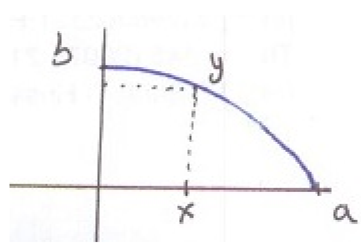

FIGURA 10. Función cóncava.

Ejercicio. 1. *Sea* $f(x) = \operatorname{sen} x$ *para* $x \in [0, \pi]$. *Se toman* $x_0, a, b \in [0, \pi]$, *con* $x_0 \leq a < b$. *Prueba que* $f'(x_0) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demostración: La función $f(x) = \operatorname{sen} x > 0$ para $x \in [0, \pi]$. Además es una función cóncava ya que $f'(x) = \cos x$ y $f''(x) = -\operatorname{sen} x < 0$.

FIGURA 11. Función seno.

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. por el Teorema del Valor Medio existe un $c \in (a, b)$ de modo que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

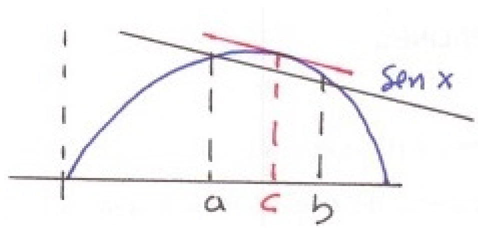

FIGURA 12. Teorema del Valor Medio.

Como la función es cóncava su derivada es una función decreciente y por tanto como $x_0 \leq a < c < b$ se tiene que

$$f'(x_0) \geq f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

□

Referencias

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es