AVR PRÁCTICA-FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Nombre y apellidos..

1.- Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \cos(t^{1/2})dt}{\operatorname{sen}^2 x}$.

ES UN LÍMITE DEL TIPO $\frac{0}{0}$.

APLICANDO L'HÔPITAL

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos(t^{1/2})\,dt}{\operatorname{sen}^2 x} \underset{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2}x\cancel{\cos x}}{\cancel{2}\operatorname{sen} x \cancel{\cos x}} = 1$$

YA QUE $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

2.- Prueba que si $x, y, x+y$ no son de la forma $k\pi + \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$.

$$\tan(x+y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)}$$

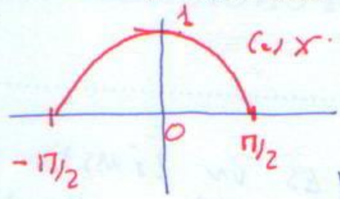
SI $x, y, x+y$ NO SON $k\pi + \pi/2$ EL $\cos x$, $\cos y$ Y $\cos(x+y)$ NO SON NULOS, ASÍ $\tan(x+y)$ ESTÁ DEFINIDA

$$= \frac{\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y} =$$

$$= \frac{\cancel{\cos x \cos y}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}\right)}{\cancel{\cos x \cos y}\left(1 - \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y}\right)} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

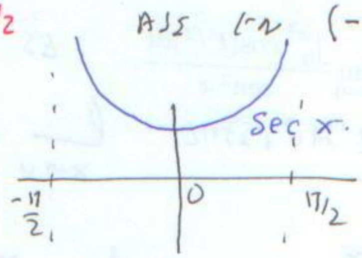
3.- Traza las gráficas de las funciones trigonométricas:

a) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ (secante).



$Dom\ \sec = \mathbb{R} - \{k\pi + \pi/2\}$ $k \in \mathbb{Z}$

Así en $(-\pi/2, \pi/2)$



$\lim_{x \to \pm\pi/2} \sec x = \infty$

$\sec x \geq 1$ si $x \in (-\pi/2, \pi/2)$

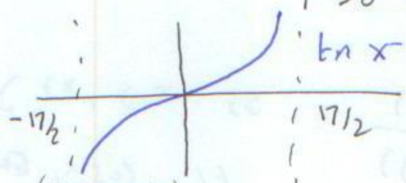
y $\sec 0 = 1$ tiene un mínimo

b) $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\quad Dom\ \tan = \mathbb{R} - \{k\pi + \pi/2\}$ ya que $\cos(k\pi + \pi/2) =$

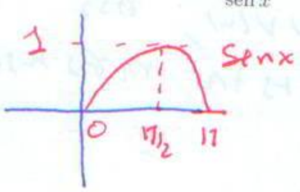
$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \infty$, $\lim_{x \to -\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\infty$ $\quad \tan 0 = 0$ y $\begin{cases} \tan x < 0 & \text{si } x < 0 \\ \tan x > 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$\tan' x = 1 + \tan^2 x > 0$, es creciente.

$\tan'' x = 2 \tan x (1 + \tan^2 x) \begin{cases} < 0 & \text{si } x \in (-\pi/2, 0) \text{ cóncava} \\ > 0 & \text{si } x \in (0, \pi/2) \text{ convexa} \end{cases}$

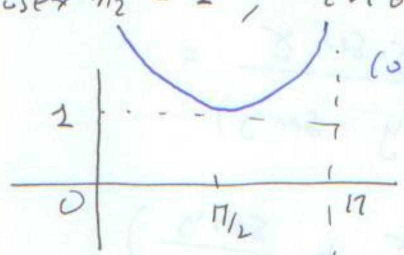


c) $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ (cosecante). $\quad Dom\ \operatorname{cosec} x = \mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.



$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{cosec} x = \infty = \lim_{x \to \pi^-} \operatorname{cosec} x$; $\frac{1}{\operatorname{sen} x} \geq 1$ si $x \in (0, \pi)$

y $\operatorname{cosec} \pi/2 = 1$, luego $x = \pi/2$ es un mínimo



d) $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ (cotangente). es como la tan x pero desplazada e invertida

$Dom\ \cot = \mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, en $(0, \pi)$,

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \infty$ y $\lim_{x \to \pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$

$\cot' x = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -1 - \cot^2 x < 0$ decreciente

$\cot'' x = -2 \cot(-1 - \cot^2 x) = \begin{cases} > 0 & \text{si } x \in (0, \pi/2) \text{ convexa} \\ < 0 & \text{si } x \in (\pi/2, \pi) \text{ cóncava} \end{cases}$