## ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

## LA MEJOR APROXIMACIÓN POLINÓMICA.

Lo que vamos a ver es que la mejor aproximación polinómica a una función $f$ por un punto es la que dan sus polinómios de Taylor.

**Definición. 1.** *Dos funciones $f$ y $g$ se dicen* ***iguales hasta el orden n*** *en un punto $a$ del dominio común si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Observemos que si $0 \leq i \leq n$ y $|x-a| < 1$, entonces

$$\left|\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^i}\right| \leq \left|\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^n}\right|$$

y así para dos funciones $f$ y $g$ iguales hasta el orden $n$

$$0 = \lim_{x\to a} \left|\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^n}\right| = \lim_{x\to a} \left|\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^i}\right|.$$

Con la Definición anterior, ya podemos decir que una función $f$ y su polonimio de Taylor de orden $P_{n,a}$ son iguales hasta el orden $n$ en $a$.

**Teorema. 1.** *Sean $P$ y $Q$ dos polinomios en potencias de $(x-a)$ de grado, ambos, menor o igual a $n$. Supongamos que $P$ y $Q$ son iguales hasta el orden $n$ en $a$. Entonces son iguales, $P = Q$.*

**Demostración:** Sea $R(x) = P(x) - Q(x)$, que será un polinomio de orden menor o igual a $n$. Así

$$R(x) = b_0 + b_1(x-a) + .... + b_n(x-a)^n$$

y

$$\lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Por la observación anterior,

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^{0)}} = b_0,$$

luego $b_0 = 0$. Ahora

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)} = b_1,$$

luego $b_1 = 0$. Seguimos así y vemos que $R = 0$, que es lo que queremos probar $\square$

**Corolario. 1.** *Sea $f : (a-\delta, a+\delta)$ una función $n$ veces derivable y con $f^{n)}$ continua. Sea $P$ un polinomio en potencias de $(x-a)$ de orden menor o igual que $n$ de modo que sea igual a $f$ hasta el orden $n$ en $a$. Entonces*

$$P(x) = P_{n,a}(x)$$

**Demostración:** Sea $P_{n,a}$ el polinomio de Taylor de orden $n$ centrado en $a$ de $f$. Tenemos que

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{P(x) - f(x) + f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} =$$

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Como $P$ y $P_n, a$ son iguales hasta el orden $n$ el Teorema nos dice que son iguales $\square$

Estos resultados nos permiten dar otra definicón del Polinomio de Taylor. $P_{n,a}$ es el único polinomio centrado en $a$ de orden $n$ igual a $f$ hasta el orden $n$ en el punto $a$.

## Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

*E-mail address*: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es