

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

POLINOMIOS DE TAYLOR. DEFINICIÓN.

Vamos a considerar una función polinómica

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} P(0) &= a_0 \\ P'(0) &= a_1 \\ P''(0) &= 2a_2 \\ &\vdots \\ P^{(k)}(0) &= k!a_k \\ &\vdots \\ P^{(n)}(0) &= n!a_n. \end{aligned}$$

Ahora despejando los coeficientes del polinomio, éste lo podemos escribir como

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

donde $P^{(0)}(0) = P(0)$ y $0! = 1$.

Si tenemos un polinomio P de grado n cuyas potencias están dadas sobre $(x - a)$, es decir

$$P(x) = a_n(x - a)^n + a_{n-1}(x - a)^{n-1} + \dots + a_2(x - a)^2 + a_1(x - a) + a_0,$$

de forma análoga a lo de arriba, podemos escribir

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Observación. 1. *Existe una relación entre los coeficientes de un polinomio y las derivadas sucesivas del mismo. ¿Algo parecido ocurre con otras funciones?*

De entrada damos la siguiente definición.

Definición. 1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función al menos n -veces derivable en un punto $a \in \text{Dom}f$. Se llama **polinomio de Taylor** de la función f de grado n y centrado en el punto a al polinomio

$$P_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Ahora nos podemos preguntar que relación hay entre una función f y sus polinomios de Taylor (que varían según el grado n).

- Para $n = 1$, el polinomio de Taylor de grado 1 es

$$P_{1,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a); \text{ verifica que } \begin{array}{l} P_{1,a}(a) = f(a) \\ P'_{1,a}(a) = f'(a) \end{array}$$

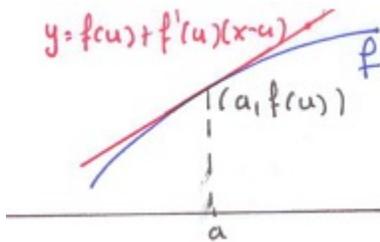


FIGURA 1. Polinomio de Taylor de grado uno.

- $n = 2$, el polinomio de Taylor de grado 2 es

$$P_{2,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2; \text{ verifica que } \begin{array}{l} P_{2,a}(a) = f(a) \\ P'_{2,a}(a) = f'(a) \\ P''_{2,a}(a) = f''(a) \end{array}$$

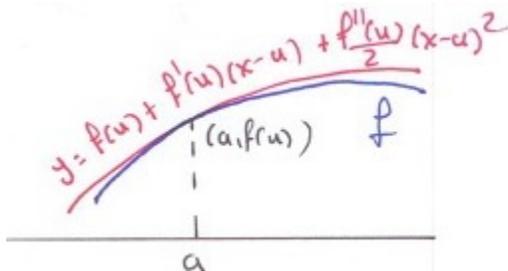


FIGURA 2. Polinomio de Taylor de grado dos.

El polinomio de grado uno $P_{1,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ no es más que la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(a, f(a))$. Como vimos, ésta era una aproximación de la función cerca del punto $a \in \text{Dom}f$.

El polinomio de grado dos $P_{2,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$, una parábola, parece una mejor aproximación de f cerca de a , ya que en este caso coinciden en el punto a hasta la segunda derivada. En general tenemos el siguiente resultado.

Teorema. 1. *Sea una función $f : (a - \epsilon, a + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable n -veces en $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ con $f^{(n)}$ continua. Entonces*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Demostración: Si al límite anterior le aplicamos n -veces la Regla de L'Hôpital llegamos a que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x) - P_{n,a}^{(n)}(x)}{n!} = 0$$

□

Observación. 2. *Se puede probar que si $P(x)$ es un polinomio de grado n de modo que para todo $k \leq n$ se verifica que*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^k} = 0,$$

entonces necesariamente $P(x) = P_{n,a}(x)$. Para ver la demostración ver el apéndice siguiente.

El resultado anterior nos permite hacer una prueba sobre máximos y mínimos relativos que dejamos pendiente desde el Tema de Derivadas.

Corolario. 1. *Sea $a \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \subset \text{Dom}f$ de modo que existen f' y f'' en $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ y $f'(a) = 0$.*

a: *Si $f''(a) > 0$, entonces a es un mínimo local de f*

b: *Si $f''(a) < 0$, entonces a es un máximo local de f*

Demostración: b) Ejercicio.

a) Sabemos por el Teorema anterior que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_{2,a}(x)}{(x-a)^2} = 0.$$

Ahora

$$\frac{f(x) - P_{2,a}(x)}{(x-a)^2} = \frac{f(x) - f(a) - \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}{(x-a)^2} = \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} - \frac{f''(a)}{2} \rightarrow_{x \rightarrow a} = 0$$

Luego se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = \frac{f''(a)}{2} > 0.$$

Como $(x - a)^2$ es positivo, necesariamente $f(x) - f(a) > 0$ en un entorno de a . Luego por definición de mínimo local, a lo es \square

Este resultado admite una versión más general. Pensemos en funciones como $f(x) = x^6$ y $g(x) = x^5$ en $a = 0$.

Teorema. 2. *Sea $a \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \subset \text{Dom}f$ de modo que existen $f', f'', \dots, f^{(n)}$ en $(a - \epsilon, a + \epsilon)$. Además $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ y $f^{(n)}(a) \neq 0$.*

- a:** *Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, entonces a es un mínimo local de f .*
- b:** *Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, entonces a es un máximo local de f .*
- c:** *Si n es impar, entonces f no tiene un mínimo ni un máximo local en a .*

Demostración: La prueba de **a)** y **b)** es como la del Corolario.

c) Por el Teorema

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right]$$

Ahora si n es impar y supongamos que $f^{(n)}(a) > 0$ (el caso $f^{(n)}(a) < 0$ se razona de forma análoga), entonces

- si $x > a$, $(x - a)^n > 0$ y así $f(x) - f(a) > 0$, cerca de a ;
- si $x < a$, $(x - a)^n < 0$ y así $f(x) - f(a) < 0$, cerca de a .

Luego a no puede ser un mínimo o máximo local \square

Vamos a poner algunos ejemplos de cálculo de polinomios de Taylor.

Ejemplo. 1. *Vamos a calcular los polinomios de Taylor de las siguientes funciones centrados en los puntos a que se indican.*

1. $f(x) = e^x$, en $a = 0$.
2. $f(x) = e^x$, en $a = 1$.
3. $f(x) = \cos x$, en $a = 0$.
4. $f(x) = \sin x$, en $a = 0$.
5. $f(x) = \ln x$, en $a = 1$.

Demostración:

1. Para todo k se tiene que $(e^x)^k|_{x=0} = e^0 = 1$, así

$$P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

2. Como en el caso anterior, $(e^x)^k|_{x=1} = e^1 = e$, así

$$P_{n,1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{e(x-1)^k}{k!}.$$

3. Si $f(x) = \cos x$, se tiene que $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, y $f^4(x) = \cos x$; volvemos al principio. Así $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$ y $f'''(0) = 0$ y se vuelve a repetir esta secuencia.

Por lo tanto

$$P_{2n,0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

(ejercicio)

4. De forma muy parecida al caso del coseno, se ve el caso $f(x) = \sin x$,

$$P_{2n+1,0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

(ejercicio).

5. Para $f(x) = \ln x$, tenemos que $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, $f^4(x) = \frac{-6}{x^4}$,...etc Viendo estas derivadas si suponemos que $f^k(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$, derivando tenemos que

$$f^{k+1}(x) = \frac{-kx^{k-1}(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^{2k}} = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}.$$

Luego por inducción hemos probado que

$$f^k(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \quad \text{y por tanto} \quad f^k(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

Ahora el polinomio de Taylor buscado es

$$P_{n,1}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k.$$

□

¿Para que nos pueden servir estos polinomios de Taylor? Los polinomios son fáciles de evaluar, solo aparecen sumas y productos. Hay funciones más difíciles de evaluar, pero se puede aproximar por su polinomio de Taylor.

Ejemplo. 2. Queremos evaluar $f(x) = \sqrt{1+x}$ cerca de cero.

Demostración: Para $x = 0, 1$ tenemos $f(0, 1) = \sqrt{1, 1}$. ¿Quién se acuerda de como se hace una raíz cuadrada? Podemos hacer otra cosa.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x} & \text{y por tanto} & \quad f(0) = 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} & \text{y por tanto} & \quad f'(0) = \frac{1}{2} \\ f''(x) &= \frac{-1}{4(1+x)\sqrt{1+x}} & \text{y por tanto} & \quad f''(0) = \frac{-1}{4}. \end{aligned}$$

El polinomio de Taylor de orden dos es por tanto

$$P_{2,0}(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2.$$

Ahora el polinomio de Taylor aproxima la función

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \simeq \sqrt{1+x} \quad \text{si } x \simeq 0.$$

Así

$$1 + \frac{1,1}{2} - \frac{(1,1)^2}{8} \simeq \sqrt{1,1}$$

□

Quizas en este caso es mejor recordar la regla del cálculo para raíces cuadradas. ¿Y si queremos calcular $\sin 1$ o $\ln 2$?

REFERENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
E-mail address: `Cesar.Ruiz@mat.ucm.es`