EXAMEN DE 2º PARCIAL. ANÁLISIS DE VARIABLE REAL (m1).

19 de Mayo de 2025.

1.- (1 punto). Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable en $[a,b]$. Prueba que existe $\mu \in [\text{ínf} f, \sup f]$ de modo que

$$\int_a^b f = \mu(b-a).$$

2.- (1 punto). Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). ¿Es f Lipchitziana? Es decir, ¿existirá $M > 0$ de modo que $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$, para todo $x, y \in [a,b]$? (**Indicación:** la diferencia $f(x) - f(y)$ sugiere usar el Teorema del Valor medio)

3.- (1 punto; **Teoría.**) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$ y f' es decreciente, prueba que $f(x) \geq f(a)$ para todo $x \in [a,b]$.

4.- (1 punto; **Teoría.**) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a,b]$. Sea $\lambda \in (-\infty, 0)$. Prueba que λf es integrable en [a,b] y que

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

5.- (1 punto) Calcula $\displaystyle\int -\frac{x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x + \cos x}{(x+1)^2} dx.$

6.- (1 punto) Se define la función $f(x) = \dfrac{(-1)^n}{3\sqrt[3]{x^2+2}+1}$ si $x \in [n, n+1)$ con $n = 1, 2, \ldots\ldots\ldots$

Comprueba que $\displaystyle\int_1^\infty |f(x)|dx = \infty$ y que $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ es convergente.

7.- (1 punto) Calcula la serie de Taylor centrada en cero de la función coseno hiperbólico $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. ¿Cuál es su radio de convergencia? ¿ Que orden n del resto $R_{0,n}(x)$ es suficiente para que el polinomio de Taylor $P_{0,n}(x)$ aproxime a la función con un error menor que $\frac{1}{100}$ en todo el intervalo $[-1, 1]$? Justifica todas tus respuestas.

8.- (1 punto) Calcula $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^{\frac{3}{2}} e^x}{4n^2x^2 - 4nx + 2} dx$ y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{n^{\frac{3}{2}} e^x}{4n^2x^2 - 4nx + 2} dx.$

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

Revisión del examen: Lunes 26 de Mayo a las 9h en el despacho 484. **No** es obligatorio acudir a la revisión.

EXAMEN

PROBLEMA 1:) Se considera la función

$$h : [\operatorname{Inf} f, \operatorname{Sup} f] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow h(x) = x(b-a).$$

Donde $\operatorname{Inf} f = \inf\{f(t) : t \in [a,b]\}$ y $\operatorname{Sup} f = \sup\{f(t) : t \in [a,b]\}$ ambos números existe ya que f es una función acotada.

$$\boxed{\operatorname{Inf} \leq f(t) \leq \operatorname{Sup} f} \quad \forall t \in [a,b]. \quad (*)$$

Como f es integrable en $[a,b]$ y por la desigualdades anteriores $(*)$

$$h(\operatorname{Inf}) = \operatorname{Inf} f\,(b-a) \leq \int_a^b f \leq \operatorname{Sup} f\,(b-a) = h(\operatorname{Sup} f)$$

Como h es continua y $\int_a^b f$ es un valor de la función $h(\operatorname{Inf})$ comprendido entre dos valores y $h(\operatorname{Sup} f)$, existe $\mu \in [\operatorname{Inf} f, \operatorname{Sup} f]$ tal que

$$\int_a^b f = h(\mu) = \mu(b-a).$$

Consecuencia del teorema de Bolzano

PROBLEMA 2:) f está en las condiciones del teorema del valor medio así $\forall x, y \in [a,b]$ con $x < y$ se tiene que $f(y) - f(x) = f'(\tau)(y-x)$ para cierto $\tau \in (x,y)$.

Si $|f'(x)| \leq M$ $\forall x \in [a,b]$, entonces $\forall x, y \in [a,b]$

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y-x|$$

Para ello f' tendría que estar acotada.

Sea $f(x) = \sqrt{x}$ continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$

Ahora $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ no está acotada en $(0,1)$

Así para $x = 0$ y $x_n = \frac{1}{n}$ $\quad |f(x_n) - f(0)| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ no es menor que $K|x_n - 0| = K\frac{1}{n}$ $\forall K \in (0,\infty)$

ya que $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq K\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \leq K$ para $K \in [0,\infty)$ lo cual es falso.

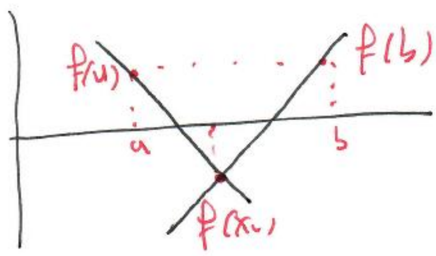
EXAMEN

PROBLEMA 3:] $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$ f continua y derivable en (a,b). f' decreciente. $\forall x \in [a,b]$

(*) Si no es cierto que $f(x) \geq f(a) = f(b)$ con

significa que existe $x_0 \in (a,b)$ así

$$f(b) = f(a) > f(x_0),$$



se sigue que

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} < 0$$

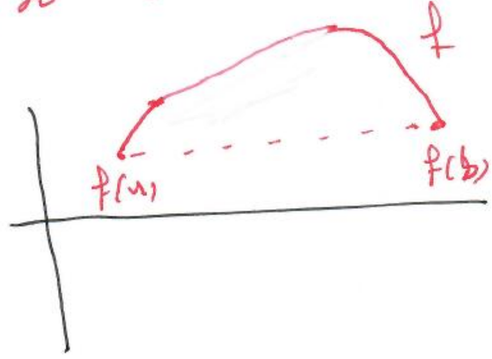
y $$\frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} > 0.$$

Por el teorema del valor medio existe $x_1 \in (a, x_0)$ de modo que $f'(x_1) = \dfrac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} < 0$

y existe $x_2 \in (x_0, b)$ de modo que $f'(x_2) = \dfrac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} > 0$

Así $x_1 < x_2$ verifican que $f'(x_1) < f'(x_2)$ lo que contradice que f' sea decreciente.

Lo supuesto en (*) no es correcto, por tanto es cierto que $f(x) \geq f(a)$ $\forall x \in [a,b]$



EXAMEN

PROBLEMA 4: Sabemos que existe $\int_a^b f$ y que $\lambda < 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\frac{\varepsilon}{-\lambda} > 0$ y por el criterio de Riemann sabemos que existe $P \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que $S(f,P) - I(f,P) < \frac{\varepsilon}{-\lambda}$.

P es $P = \{t_0, t_1 \ldots t_i, t_{i+1} \ldots t_n = b\}$.

Así
$$M_{\lambda f,i} = \sup\{\lambda f(t) : t \in [t_i, t_{i+1}]\} \overset{\lambda<0}{=} \lambda \inf\{f(t) : t \in [t_i, t_{i+1}]\} = \lambda m_{f,i}$$

y
$$m_{\lambda f,i} = \inf\{\lambda f(t) : t \in [t_i, t_{i+1}]\} \overset{\lambda<0}{=} \lambda \sup\{f(t) : t \in [t_i, t_{i+1}]\} = \lambda M_i$$

Luego
$$S(\lambda f,P) - I(\lambda f,P) = \lambda \inf(f,P) - \lambda \sup(f,P) = -\lambda[\sup(f,P) - I(f,P)] \le -\lambda \frac{\varepsilon}{-\lambda} = \varepsilon$$

de lo que se sigue (por el criterio de Riemann) que λf es integrable.

Además como
$$\int_a^b \lambda f - \lambda \int_a^b f \le S(\lambda f, P) \underset{-\lambda>0}{-\lambda S(f,P)} = \lambda I(f,P) - \lambda S(f,P) = -\lambda\big(S(f,P) - I(f,P)\big) \le \varepsilon$$

o bien
$$\lambda \int_a^b f - \int_a^b \lambda f \le \lambda I(f,P) - \operatorname{Inf}(\lambda f,P) \overset{\lambda<0}{=} \lambda I(f,P) - \lambda \operatorname{Sup}(f,P) = -\lambda\big(\operatorname{Sup}(f,P) - I(f,P)\big) \le \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$, se sigue que $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

EXAMEN

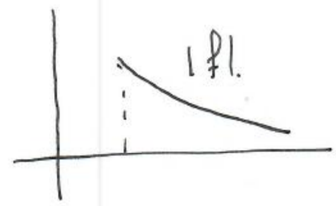
PROBLEMA 5:

$$\int -\frac{x\,\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}x + \cos x}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{-\operatorname{sen}x\,(x+1) - \cos x\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{\cos x}{x+1}\right)' dx = \frac{\cos x}{x+1} + K.$$

PROBLEMA 6: $f(x) = \dfrac{(-1)^n}{3\sqrt[3]{x^2+2}+1}$ SI $x \in [n, n+1]$ $n = 1, 2 \ldots$



$$\int_1^\infty |f(x)|\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2+2}+1}\,dx$$

AHORA COMPARAMOS CON $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3\sqrt[3]{x^2+2}+1}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{27(x^2+2)}{x^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 3.$$

AHORA $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-2/3+1}\Big|_1^\infty = 3\sqrt[3]{x}\Big|_1^\infty = \infty.$

LUEGO LA INTEGRAL $\displaystyle\int_1^\infty |f(x)|\,dx$ QUE SE COMPORTA COMO $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, NO ES CONVERGENTE.

POR OTRO LADO: USANDO EL CRITERIO DE DIRICHLET

PARA $h(x) = (-1)^n$ SI $x \in [n, n+1]$ Y $g(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2+2}+1} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

COMO $\displaystyle\int_1^a h(x)\,dx = \sum_{j=1}^{k-1} \int_j^{j+1} (-1)^n + \int_k^a (-1)^k =$ $\quad a \in [k, k+1]$

$= (-1) + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{k-1} + (-1)^k a$ ASI $\left|\displaystyle\int_1^a h(x)\,dx\right| < 1$,

EL CRITERIO DE DIRICHLET. NOS QUE $\displaystyle\int_1^\infty f$ ES CONVERGENTE:

EXAMEN

PROBLEMA 7: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n!} \right) =$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$(-1)^n = \begin{cases} -1 & n \text{ impar} \\ 1 & n \text{ par} \end{cases}$

Esto es una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

de modo que $\forall x > 0$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leq e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

luego como converge $\forall x \geq 0$, también lo hace la suma $\mathbb{R}$; el radio de convergencia es ∞.

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{0,2n}(x)$$

$$|R_{0,2n}(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \underset{x \in [-M,M]}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{M^{2k}}{(2k)!}$$

o también $R_{0,2n}(x) = \int_0^x \frac{\cosh^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \, dt$

$$= \int_0^x \frac{\operatorname{senh}(t)}{n!} (x-t)^n \, dt \leq$$

$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ creciente.

$(\operatorname{senh})'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x > 0$

$$\underset{x \in [-M,M]}{\leq} \frac{e^M - e^{-M}}{2} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} =$$

$$= \frac{e^M - e^{-M}}{2} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{e^M - e^{-M}}{2} \frac{|M|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Si $M = 1$ $|R_{0,2n}(x)| \leq \frac{e}{2} \frac{1}{(n+1)!} \underset{e<3}{\leq} \frac{2}{(n+1)!}$ para que el resto sea menor que $\frac{1}{100}$ con $n = 6 \Rightarrow \frac{2}{6!} < \frac{1}{100}$ //

EXAMEN

PROBLEMA 8:) SEA $f_n(x) = \dfrac{n^{3/2} e^x}{4n^2x^2 - 4nx + 2}$ $x \in [0,1]$

$$f_n(x) = \frac{n^{3/2} e^x}{(2nx-1)^2 + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{SI } x \in (0,1] \\ \infty & \text{SI } x = 0 \end{cases}$$

LÍMITE PUNTUAL

EN $[1/2, 1]$ $|f_n(x) - 0| = \dfrac{n^{3/2} e^x}{(2nx-1)^2+1} \le$ $1/2 < x \le 1$

$$\le \frac{n^{3/2} e}{(n-1)^2+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

LUEGO TENEMOS CONVERGENCIA UNIFORME DE f_n A 0 EN $[1/2, 1]$, ASÍ $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{n^{3/2} e^x}{4n^2x^2 - 4nx + 2}\,dx =$

$$= \int_{1/2}^{1} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2} e^x}{4n^2x^2 - 4nx + 2}\,dx = \int_{1/2}^{1} 0\,dx = 0.$$

POR OTRO LADO, COMO EL LÍMITE PUNTUAL NO ES CONTINUO EN $[0,1]$, NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN $[0,1]$

DERIVAMOS SIN PROBLEMAS $f_n(x) = \dfrac{n^{3/2} e^x}{(2nx-1)^2+1}$; $f_n(x) \ge 0$ $\forall x > 0$ Y $f_n(0) = \dfrac{n^{3/2}}{2}$

AHORA $f_n'(x) = \dfrac{n^{3/2}}{((2nx-1)^2+1)^2} \left[e^x((2nx-1)^2+1) - 4n e^x (2nx-1) \right] =$

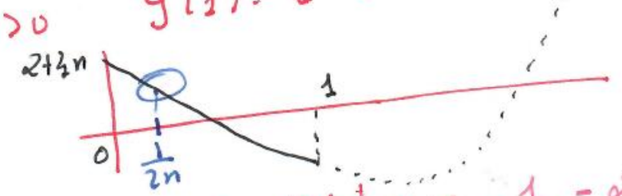
$$= \frac{n^{3/2}}{((2nx-1)^2+1)^2} e^x \left[4n^2x^2 - (4n + 8n^2)x + 2 + 4n \right].$$

EL SIGNO DE f_n' DEPENDE DE DE LA PARÁBOLA $g(x) = 4n^2x^2 - (4n+8n^2)x + 2 + 4n$

$g(1) = 2 - 8n^2 < 0$ Y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \infty$

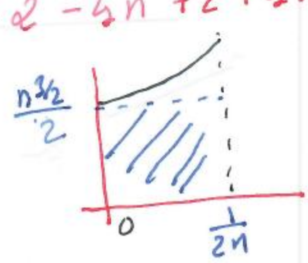
$g(0) = 2 + 4n > 0$

LUEGO g



OBSERVEMOS QUE $g\left(\frac{1}{2n}\right) = 1 - 2 - 4n + 2 + 4n > 0$

LUEGO $f_n' > 0$ EN $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$



LUEGO $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx \ge \int_0^{\frac{1}{2n}} f_n(x)\,dx \ge$

$$\ge \int_0^{1/2n} \frac{n^{3/2}}{2} = \frac{n^{3/2}}{2} \cdot \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \text{ ; LUEGO } \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \infty$$