EXAMEN AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS.

13 de Junio de 2025.

1.- Se considera la sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^p}$, con $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Halla el límite puntual f de la sucesión y determina los valores de p para los que la sucesión converge uniformemente a f en $[0,1]$.

2.- Calcula la serie de Fourier de la función $f(x) = 1 - |x|$ con $x \in [-1,1]$.

3.- Encuentra la solución general de la ecuación diferencial

$$x''(t) + x(t) = \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\cos t.$$

4.- Dado un número primo p, calcula el inverso de $p-1$ en $(\mathbb{Z}_p, \times)$.

Resuelve: $\begin{cases} x \equiv 1 & \text{mod.}82 \\ 82x \equiv 1 & \text{mod.}83. \end{cases}$

5.- Considera el grupo $G = (\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{12}, +)$.

1. ¿De cuántos órdenes pueden ser los elementos de G?
2. Encuentra elementos de cada uno de los órdenes posibles.

Justifica tu respuesta en ambos casos.

6.- x^2+x+1 es el único polinomio irreducible de grado 2 en $\mathbb{Z}_2[x]$.

A) ¿Es $x^5+x^4+x^3+x+1$ irreducible en $\mathbb{Z}_2[x]$? Justifica tu repuesta.

B) Encuentra un cuerpo de orden 32, $\mathbb{F}_{32}$, donde $x^5+x^4+x^3+x+1$ sea reducible. Encuentra el inverso de α^5 en $\mathbb{F}_{32}$ donde α es la clase del polinomio x.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.

El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

Revisión del examen:

.- **Presencial .**

.- Las soluciones del examen se podrán consultar en: http://blogs.mat.ucm.es/cruizb/inicio/docencia-curso-22-23/ampliacion-de-matematicas/examenes-de-am/

La revisión del examen se efectuará el día ??? de Enero a las ???h en el aula ????. No es obligatorio solicitar la revisión.

PROBLEMA 1:

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^p}$$

LÍMITE PUNTUAL: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^p} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0}{1} = 0 & \text{SI } x=0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{n}+nx^p} = 0 & \text{SI } x\neq 0 \end{cases}$$

ASÍ $\boxed{f \equiv 0.}$

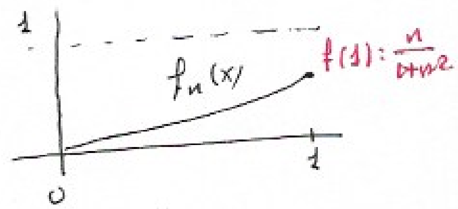
CONVERGENCIA UNIFORME:

OBSERVEMOS QUE
$$f_n'(x) = \frac{1}{(1+n^2x^p)^2}\left[n(1+n^2x^p) - nx(pn^2x^{p-1})\right] =$$
$$= \frac{1}{(1+n^2x^p)^2}\left[n + n^3x^p(1-p)\right]$$

DOS CASOS.

SI $p=1$ $\quad f_n'(x) = \frac{n}{(1+n^2x^p)^2} > 0 \quad \forall x$, LUEGO

f_n CRECIENTE



COMO $\frac{n}{1+n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ASÍ $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 : n \geq n_0 \quad \frac{n}{1+n^2} \leq \varepsilon$,

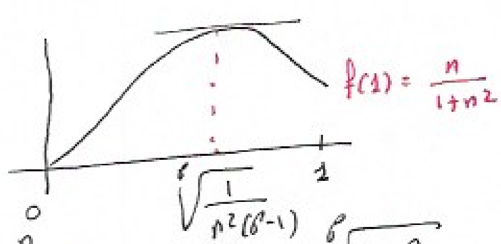
LUEGO $|f(x) - f_n(x)| = \left|0 - \frac{nx}{1+n^2x}\right| \leq \frac{n}{1+n^2} < \varepsilon$ SI $n\geq n_0$

$p=1$, $f_n(x)$ CRECIENTE.
$f(x) \leq f(1) \quad \forall x<1$

PARA $p=1$ HAY CONVERGENCIA UNIFORME

SI $p>1$ $\quad f_n'(x) = \frac{1}{(1+n^2x^p)^2}\left[n+n^3x^p(1-p)\right] = 0 \iff x = \sqrt[p]{\frac{1}{n^2(p-1)}}$

PUNTO DE MÁXIMO

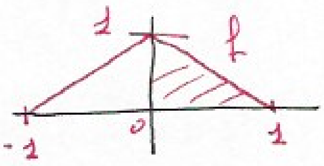


AHORA
$$f_n\left(\sqrt[p]{\frac{1}{n^2(p-1)}}\right) = \frac{n\sqrt[p]{\frac{1}{n^2(p-1)}}}{1+n^2\frac{1}{n^2(p-1)}} = \frac{\sqrt[p]{\frac{n^p}{n^2(p-1)}}}{1+\frac{1}{p-1}} =$$

$$= \frac{\sqrt[p]{\frac{n^{p-2}}{p-1}}}{1+\frac{1}{p-1}} \underset{\substack{n\to\infty \\ p\geq 2}}{\not\longrightarrow} 0$$

LUEGO NO PUEDE HABER CONVERGENCIA UNIFORME EN $[0,1]$.

PROBLEMA 2:



$f(x) = 1 - |x| \qquad x \in [-1,1]$

f es 2-periódica y par.

Luego al calcular su serie de Fourier

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} 1 - |x| \, dx \underset{\substack{\downarrow \\ f \text{ par}}}{=} 2\int_0^1 1 - x \, dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{área del} \\ \text{triángulo}}}{=} 1 =$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{usando la regla} \\ \text{de Barrow}}}{=} 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\left[1 - \frac{1}{2}\right] = 1.$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} (1 - |x|) \cos \pi n x \, dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{integrando} \\ \text{par}}}{=} 2\int_0^1 (1-x)\cos \pi n x \, dx =$$

$$\underset{(*)}{=} -2 \times \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{2}{\pi^2 n^2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \cos \pi n x \, dx = \frac{\operatorname{sen} \pi n x}{\pi n}\Big|_0^1 = 0$$

$$\int_0^1 x \cos \pi n x \, dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{partes}}}{=} \cancel{x \frac{\operatorname{sen} \pi n x}{\pi n}}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} \pi n x}{\pi n} = \frac{\cos \pi n x}{\pi^2 n^2}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} \frac{-2}{\pi^2 n^2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Así la serie de Fourier de f es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos (2k+1)\pi x = \boxed{\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k+1)^2} \cos (2k+1)\pi x}$$

PROBLEMA 3:

$x''(t)+x(t) = \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\cos t$. ¿Solución general?

$x''(t)+x(t)=0$ E.D.O. HOMOGÉNEA ASOCIADA

Ec. característica $\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda = \pm i$ Dos soluciones complejas.

Luego $\boxed{x(t) = A\cos t + B\operatorname{sen} t}$ $A, B \in \mathbb{R}$.

Solución general de la homogénea

Necesitamos una solución particular de $x''+x = \frac{1}{4}\cos 3t$.

Como $3i$ no es solución de la ec. característica

Probamos una solución

$y_0(t) = A\cos 3t$

$y_0'(t) = -3A\operatorname{sen} 3t$

$y_0''(t) = -9A\cos 3t$

Así, entrando en la E.D.O.

$-9A\cos 3t + A\cos 3t = \frac{1}{4}\cos 3t$

por tanto $(-9A+A) = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{A = \frac{-1}{32}}$

Necesitamos una solución particular de $x''+x = \frac{3}{4}\cos t$

Como i es solución particular de la ec. característica

Probamos con $y_0(t) = t(A\cos t + B\operatorname{sen} t)$

$y_0'(t) = (A\cos t + B\operatorname{sen} t) + t(-A\operatorname{sen} t + B\cos t)$

$y_0''(t) = -A\operatorname{sen} t + B\cos t - A\operatorname{sen} t + B\cos t + t(-A\cos t - B\operatorname{sen} t)$

Entrando en la EDO

$\frac{3}{4}\cos t = y_0''(t) + y_0(t) = -2A\operatorname{sen} t + 2B\cos t \Rightarrow$ $A=0$, $\boxed{B = 3/8}$

Por el principio de superposición la solución general buscada es $\boxed{x(t) = A\cos t + B\operatorname{sen} t - \frac{1}{32}\cos 3t + \frac{3t}{8}\operatorname{sen} t}$ $A, B \in \mathbb{R}$

COMPROBACIÓN: $x'(t) = -A\operatorname{sen} t + B\cos t + \frac{3}{32}\operatorname{sen} 3t + \frac{3}{8}\operatorname{sen} t + \frac{3t}{8}\cos t$

$x''(t) = -A\cos t - B\operatorname{sen} t + \frac{9}{32}\cos 3t + \frac{3}{8}\cos t + \frac{3}{8}\cos t - \frac{3t}{8}\operatorname{sen} t$

Luego $x''(t) + x(t) = \cancel{-A\cos t} \cancel{- B\operatorname{sen} t} \cancel{+ A\cos t} \cancel{+ B\operatorname{sen} t} + \frac{9}{32}\cos 3t - \frac{1}{32}\cos 3t +$

$+ \frac{3}{8}\cos t + \frac{3}{8}\cos t \cancel{- \frac{3t}{8}\operatorname{sen} t} \cancel{+ \frac{3t}{8}\operatorname{sen} t} =$

$= \frac{8}{32}\cos 3t + \frac{6}{8}\cos t = \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\cos t$. ✓

PROBLEMA 4.

$p-1 \in (\mathbb{Z}_p \times)$ p primo, entonces $(p-1)(p-1) =$

$= p^2 - 2p + 1 \equiv 1 \mod p$

Luego $(p-1)^{-1} = p-1$

Ahora $\begin{cases} x \equiv 1 \mod 82 \\ 82x \equiv 1 \mod 83 \end{cases} \underset{\uparrow}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{matrix} x \equiv 1 \mod 82 \\ x \equiv 82 \mod 83 \end{matrix}$

83 primo

Como $mcd(82, 83) = 1$ (↓), podemos usar el teorema chino del resto y

$$x \equiv 1 \times 83 \times [83]^{-1}_{82} + 82 \times 82 \times [82]^{-1}_{83} \equiv$$

$$\equiv 83 \times 1 + 82 \times 82 \times 82 \mod 82 \times 83 \equiv$$

$$= 551451 \mod (6806) \equiv \underline{165} \mod (6806)$$

82×82: 164, 656, 6724	82×83: 246, 656, 6806	551451 ÷ 6806 = 81
6724×82: 13448, 53792, 551368		06871
$551368 + 83 = 551451$		0165

PROBLEMA 5°

$G = (\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{12} +) \cong$ como $mcd(7,12) = 1$

$\cong (\mathbb{Z}_{84} +)$ grupo cíclico

$84 = 7 \times 2^2 \times 3$

divisores de 84 son

Usamos $ord(a,b)$ con $(a,b) \in \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{12}$ es $mcm(ord_7 a, ord_{12} b)$

2	elemento orden 2	(0, 6)
3	elemento orden 3	(0, 4)
4	elemento orden 4	(0, 3)
6	" orden 6	(0, 2)
12	" orden 12	(0, 1)
7	" orden 7	(1, 0)
14	" orden 14	(1, 6)
21	" orden 21	(1, 4)
28	" orden 28	(1, 3)
42	" orden 42	(1, 2)
84	" orden 84	(1, 1)

PROBLEMA 6:

$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ no tiene raíces en $\mathbb{Z}_2$.

ya que $f(0) = 1 \neq 0$

$f(1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 \neq 0$

Además

$$\begin{array}{l|l} x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 & x^2 + x + 1 \\ \hline -x^5 - x^4 - x^3 & x^3 \\ \hline x + 1 & \end{array}$$

f no es divisible por el único polinomio irreducible de grado 2 en $\mathbb{Z}_2[x]$, luego f no se puede descomponer en $\mathbb{Z}_2[x]$ y es irreducible!

$\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2[x] / (x^5 + x^4 + x^3 + x + 1)$ es un cuerpo de $2^5 = 32$ elementos, y $\alpha = [x]$ es raíz de $x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$

luego en $\mathbb{F}$ f es reducible

Ahora ¿α^{-1} en $\mathbb{F}$? en $\mathbb{F}$

$$0 = \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha + 1 \Rightarrow$$

$$1 = -1 = \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha = \alpha(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + 1)$$

Así $\alpha^{-1} = \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + 1$

Usando el algoritmo de Euclides $\mathrm{mcd}(x^5 + x^4 + x^3 + x + 1, x) = 1$

Así

i				
r_i	$x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$	x	1	0
q_i			$x^4 + x^3 + x^2 + 1$	x
α_i	1	0	1	
β_i	0	1	$x^4 + x^3 + x^2 + 1$	

Luego $1 \cdot (x^5 + x^4 + x^3 + x + 1) + x(x^4 + x^3 + x^2 + 1) = 1$

y claro $\alpha^{-1} = [x]^{-1} = [x^4 + x^3 + x^2 + 1] = \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + 1$.

EXAMEN

EJERCICIO 6: B] CONTINUACIÓN

LO QUE TENEMOS QUE ENCONTRAR ES $(\alpha^5)^{-1}$

AHORA EN $\mathbb{F}_{32} = \mathbb{Z}_2[x] / x^5+x^4+x^3+x+1$

α LA CLASE DE LA $[x]$ ES UNA RAÍZ DE $x^5+x^4+x^3+x+1$

LUEGO $\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha+1=0$

ASÍ $\alpha^5 = -(\alpha^4+\alpha^3+\alpha+1) = \alpha^4+\alpha^3+\alpha+1$

-1 EN $\mathbb{Z}_2$ ES 1

AHORA

$$\begin{array}{r|l} x^5+x^4+x^3+x+1 & x^4+x^3+x+1 \\ -x^5-x^4 \quad -x^2-x & x \\ \hline x^3+\cancel{x}^2+1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^4+x^3+x+1 & x^3+x^2+1 \\ -x^4-x^3 \quad -x & x \\ \hline 1 & \end{array}$$

AHORA

r_i	$x^5+x^4+x^3+x+1$	x^4+x^3+x+1	x^3+x^2+1	1
q_i		x	x	
α_i	1	0	1	$\cancel{x}$
β_i	0	1	x	x^2+1

ASÍ USANDO EL ALGORITMO DE EUCLIDES

$$\boxed{1 = x\,(\underbrace{x^5+x^4+x^3+x+1}_{0}) + (x^2+1)(\underbrace{x^4+x^3+x+1}_{\alpha^5})}$$

LUEGO $\boxed{(\alpha^5)^{-1} = \alpha^2+1}$

COMPROBACIÓN $\alpha^5(\alpha^2+1) = \alpha^7+\alpha^5$

$$\begin{array}{r|l} \alpha^7+\alpha^5 & \alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha+1 \\ -\alpha^7-\alpha^6-\alpha^5-\alpha^3-\alpha^2 & \alpha^2+\alpha \\ \hline \alpha^6+\alpha^3+\alpha^2 & \\ \hline \alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha & \end{array} = 1 //$$