EXAMEN FINAL. ANÁLISIS DE VARIABLE REAL (m1).

Primer PARCIAL. 30 de Mayo de 2025.

Escribe cada pregunta en una hoja separada del resto.
En todas las respuestas, enuncia claramente los resultados que vas a utilizar.

1. **(1 punto)**

   Demuestra el *Teorema de los Intervalos Encajados de Cantor:*

   Si $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, es una sucesión encajada (i.e., $I_{n+1} \subset I_n$) de intervalos cerrados y acotados, entonces existe un número $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\xi \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (es decir, $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$).

2. **(1 punto)**

   Demuestra que la siguiente sucesión es monótona creciente y acotada superiormente:

   $$x_1 = 8, \quad x_{n+1} = \sqrt{9 + 8\,x_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Justifica que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge y calcula su límite.

3. **(1 punto)**

   Calcula los siguientes límites:

   $$(a) \quad \lim_{x\to 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2+5}}, \qquad (b) \quad \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right).$$

4. **(1 punto)**

   Demuestra que, si $a > e$, la siguiente serie es convergente:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{a}\right)^n.$$

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.

El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

Revisión del examen: El próximo Miércoles 9 de Junio a las 9h en el despacho 437. **No** es obligatorio acudir a la revisión.

EXAMEN FINAL. ANÁLISIS DE VARIABLE REAL (m1).

Segundo PARCIAL. 30 de Mayo de 2025.

5.- (1 punto) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en todo $[a, b]$. Prueba que existe $m \in \mathbb{R}$ de modo que

$$m \leq f(x) \qquad \text{para todo} \qquad x \in [a, b].$$

6.- (1 punto) Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función tal que existe f'' en todo (a, b) y es concava en (a, b). Sea $x_0 \in (a, b)$, prueba que

$$f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad \text{para todo} \qquad x \in (a, b).$$

7.- (1 punto) Calcula la serie de Taylor centrada en cero de la función $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$ ¿Para que valores de $\mathbb{R}$ converge la serie de Taylor? Justifica tu respuesta.

8.- (1 punto) Calcula $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x + 1} dx$.

9.- (1 punto) Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua en $[0, \infty)$. Si $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)x^2}{1 + \operatorname{sen}^2 x} = 0$ ¿existe $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$? Justifica tu respuesta.

10.- Se considera

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < -2n \\ -\frac{1}{n^2}(-2n - x)^2 + 1 & \text{si} \quad x \in [-2n, -n] \\ \frac{2x^2 - 2n^2}{-1 - n^2} & \text{si} \quad x \in [-n, n] \\ -\frac{1}{n^2}(2n - x)^2 + 1 & \text{si} \quad x \in [n, 2n] \\ 1 & \text{si} \quad x > 2n, \end{cases}$$

para $n \in \mathbb{N}$.

1. Calcula su límite puntual.
2. ¿Converge uniformemente en $[-M, M]$, para $M > 0$? Justifica tu respuesta.
3. ¿Converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$? Justifica tu respuesta.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

Revisión del examen: El próximo Miércoles 9 de Junio a las 9h en el despacho 484. **No** es obligatorio acudir a la revisión.

EXAMEN

1:] $I_{n+1} \subset I_n$ y ¿$\exists\, \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$?

Como $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \Rightarrow a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$.

Luego $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto no vacío acotado superiormente por b_1; así podemos afirmar que $\exists\, \alpha = \sup A = \sup\{a_n\}$.

y $a_n \le \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ahora si existiese b_{n_0} con $b_{n_0} < \alpha$.

Como $a_n \le b_{n_0} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (claro si existe a_m con $b_{n_0} < a_m$ $m > n_0$ tendríamos $[a_m, b_m] \not\subset [a_{n_0}, b_{n_0}]$).

Se sigue que $\alpha \neq \sup\{a_n\}$, ya que b_{n_0} es una cota superior más pequeña que α.

Así por tanto $a_n \le \alpha \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [a_n, b_n] \ \forall n$ y lo que es lo mismo $\alpha \in \bigcap_n [a_n, b_n]$.

2:] $x_1 = 8 \qquad x_{n+1} = \sqrt{9 + 8x_n} \quad n \in \mathbb{N}$.

Está sucesión es creciente: es claro que $x_1 = 8 < \sqrt{9+8\cdot 8} = x_2$

suponiendo $x_n \le x_{n+1} \Rightarrow 9 + 8x_n \le 9 + 8x_{n+1} \Rightarrow$

$$x_{n+1} = \sqrt{9+8x_n} \le \sqrt{9+8x_{n+1}} = x_{n+1}.$$

Por inducción hemos visto que (x_n) es creciente.

Está acotada superiormente: $x_1 = 8 \le 10$

Si suponemos $x_n \le 10$, tenemos que

$$x_{n+1} = \sqrt{9+8x_n} \le \sqrt{9+8\cdot 10} = \sqrt{89} < 10.$$

Por inducción vemos que $x_n \le 10 \ \forall n$.

Por tanto $\exists\, \ell_{n\to\infty}\, x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \ell$.

Ahora como $x_{n+1} = \sqrt{9+8x_n} \xrightarrow[\text{límites en } n]{\text{tomando}} \ell = \sqrt{9+8\ell} \Rightarrow \ell^2 = 9 + 8\ell$

Así $0 = \ell^2 - 8\ell - 9 = (\ell+1)(\ell-9) \Rightarrow \boxed{\ell = 9}$ raíz positiva

EXAMEN

3.- CALCULA

$$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-(x^2+5)} = \lim_{x\to 2} \frac{(\cancel{4-x^2})(3+\sqrt{x^2+5})}{\cancel{4-x^2}} = 6$$

↓
MULTIPLICAMOS Y DIVIDIMOS POR EL CONJUGADO DEL DENOMINADOR

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\,(x+1-x)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}+1} = 1/2$$

4.- SI $a > e$ PRUEBA QUE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{a}\right)^n$ ES CONVERGENTE.

COMO ES UNA SERIE DE TÉRMINOS POSITIVOS $a > e > 0$ APLICAMOS EL CRITERIO DEL COCIENTE, ASÍ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{a}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{a}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{a}\cdot\frac{\left(\frac{n+1}{a}\right)^n}{\left(\frac{n}{a}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{a} < 1$$

↓
$a > e$ HIPÓTESIS

EL CRITERIO DEL COCIENTE NOS DICE QUE LA SERIE ES CONVERGENTE.

EXAMEN

PROBLEMA 5º ¿Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua ¿$\exists\, m \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq m \quad \forall x \in [a,b]$?

SUPONGAMOS QUE NO Y VAMOS A LLEGAR A UNA CONTRADICCIÓN. SI $\forall n \in \mathbb{N}$, EXISTE $x_n \in [a,b]$ TAL QUE $-n > f(x_n)$, COMO $(x_n) \subseteq [a,b]$ ES UNA SUCESIÓN ACOTADA

$$a \leq x_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

POR EL TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS EXISTE UNA SUBSUCESIÓN $(x_{n_k})_k$ CONVERGENTE $x_{n_k} \to x$ Y CLARO $x \in [a,b]$. ADEMÁS $-n_k > f(x_{n_k}) \ \forall k \in \mathbb{N}$ DE LA CONTINUIDAD DE f,

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x) \in \mathbb{R} \quad (x \in [a,b])$$

COMO $-n_k > f(x_{n_k}) \ \forall k$ SE SIGUE QUE

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = -\infty.$$

¡LLEGAMOS A CONTRADICCIÓN! ASÍ DEBE EXISTIR $m \in \mathbb{R}$ TAL QUE $f(x) \geq m \quad \forall x \in [a,b]$

PROBLEMA 6º ¿$f(x) \leq f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$, PARA TODO $x \in (a,b)$, CON f CÓNCAVA Y TAL QUE $\exists\, f''$ EN (a,b)! $x_0 \in (a,b)$ Y CON

SEA $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x-x_0) - f(x_0)$; $\quad g(x_0) = 0$

Y $g'(x) = f'(x) - f'(x_0) \quad \forall x \in (a,b)$. ADEMÁS $g'(x_0) = 0$ Y $f'' < 0$ EN (a,b) Y ASÍ f' POR SER f CÓNCAVA $\Rightarrow$ ES DECRECIENTE; LUEGO

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0) \begin{cases} \geq 0 & \text{SI } x < x_0 \\ = 0 & \text{SI } x = x_0 \\ \leq 0 & \text{SI } x > x_0 \end{cases}$$

LUEGO g CRECE EN (a, x_0) Y DECRECE EN (x_0, b). $x = x_0$ ES UN MÁXIMO DE g EN (a,b); LUEGO

$$0 = g(x_0) \geq f(x) - f'(x_0)(x-x_0) - f(x_0) \quad \forall x \in (a,b)$$

Y DESPEJANDO $\quad f(x) \leq f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \quad \forall x \in (a,b).$

O TAMBIÉN $f(x) = P_{x_0,1}(x) + R_{x_0,1}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f''(\xi)(x-x_0)^2}{2}$ RESTO DE LAGRANGE $\xi \in (x, x_0) \cup (x_0, x)$

EXAMEN

PROBLEMA 7º) Serie de Taylor de $\frac{1}{1+x^3}$

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1+x^3-x^3}{1+x^3} = 1 - \frac{x^3}{1+x^3} = 1 - \frac{x^3+x^6-x^6}{1+x^3} = 1 - x^3 + \frac{x^6}{1+x^3} =$$

$$= 1 - x^3 + \frac{x^6+x^9-x^9}{1+x^3} = 1 - x^3 + x^6 - \frac{x^9}{1+x^3} = \cdots =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{3k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{3(n+1)}}{1+x^3}$$

Como
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^3} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{3k}}{x^{3n}} = \lim_{x\to 0} \frac{(-1)^{n+1}\frac{x^{3n+3}}{1+x^3}}{x^{3n}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} (-1)^{n+1} \frac{x^3}{1+x^3} = 0$$ deducimos que el polinomio de Taylor de orden $3n$ de la función es $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{3k}$.

La serie de Taylor es por tanto $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{3k}$

Como es una serie de potencias, calculamos su radio de convergencia

Criterio del cociente $\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{3(k+1)}|}{|x^{3k}|} = |x|^3 < 1 \iff$

$\iff |x| < 1$ Como $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (-1)^{3k}$ y $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ no son convergentes, la serie de Taylor converge en $(-1, 1)$.

PROBLEMA 8º) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x + 1}\, dx =$

$\cos' x = -\operatorname{sen} x$

$$= -\int \frac{-\operatorname{sen} x\,(\cos x + \cos^2 x)}{\cos^2 x + 1}\, dx \underset{\substack{u = \cos x \\ du = -\operatorname{sen} x\, dx}}{=} -\int \frac{u+u^2}{u^2+1}\, du =$$

$$= -\int \frac{u^2+1}{u^2+1} + \frac{u-1}{u^2+1}\, du = -\int du - \frac{1}{2}\int \frac{2u-2}{u^2+1}\, du =$$

$$= -\int du - \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1} + \int \frac{1}{u^2+1}\, du = -u - \frac{1}{2}\ln u^2+1 + \operatorname{Arctn} u =$$

$$\underset{u=\cos x}{=} -\cos x - \frac{1}{2}\ln(\cos^2 x + 1) + 2 \operatorname{Arctn}(\cos x).$$

EXAMEN

PROBLEMA 9: $f\ [0,\infty) \to \mathbb{R}$ unif. continua.

y tal que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)\,x^2}{1+\operatorname{sen}^2 x} = 0$

¿$\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$? Como $1 \le 1+\operatorname{sen}^2 x \le 2 \quad \forall x \in [0,\infty)$

y $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$, necesariamente $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

(en otro caso no sería $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)\,x^2}{1+\operatorname{sen}^2 x} = 0$)

Por otro lado $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x} f(x)\,x^2 = 0$

ya que $1 \le |1+\operatorname{sen}^2 x|$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)\,x^2}{1+\operatorname{sen}^2 x} = 0.$

Luego dado $\varepsilon = 1$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $x > N \Rightarrow$

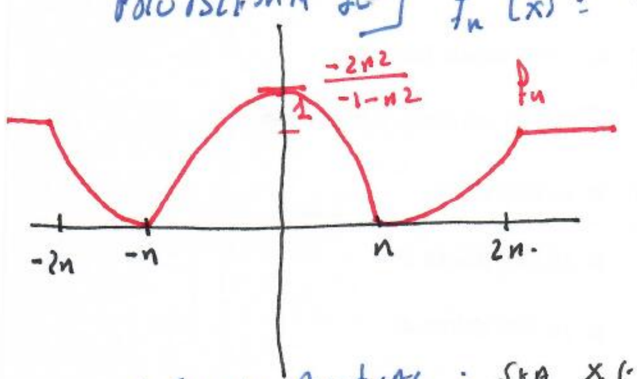
$$f(x) \le 1 \cdot \frac{1}{x^2}$$

Así $\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^N f(x)\,dx + \int_N^\infty f(x)\,dx \le \underline{\int_0^N f(x)\,dx} + \underline{\int_N^\infty \frac{1}{x^2}\,dx} < \infty$

ya que la integral $\int_0^N f(x)\,dx$ existe por ser f continua

y existe $\int_N^\infty f(x)\,dx \le \int_N^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_N^\infty = \frac{1}{N}.$

PROBLEMA 10º:



$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -2n \\ -\frac{1}{n^2}(-2n-x)^2 + 1 & \text{si } x \in [-2n,-n] \\ \dfrac{2x^2-2n^2}{-1-n^2} & x \in [-n,n] \\ -\frac{1}{n^2}(2n-x)^2 + 1 & x \in [n,2n] \\ 1 & x > 2n. \end{cases}$$

Límite puntual: sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $n_0 \in \mathbb{N}$ con $x \in [-n_0, n_0]$.

Así $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2x^2-2n^2}{-1-n^2} = 2$ $\quad f \equiv 2$ límite puntual

Límite uniforme: $|2 - f_n(n)| = 2-1 = 1 \quad \forall n.$ No hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}$.

Si $x \in [-M,M]$ y $n_0 > M$ $\quad \left|2 - f_n(x)\right| = \left|2 - \dfrac{2x^2-2n^2}{-1-n^2}\right| = \left|\dfrac{-2\cancel{-2n^2}-2x^2\cancel{+2n^2}}{-1-n^2}\right| \underset{n>n_0}{\le}$

$\underset{x\in[-M,M]}{\le} \dfrac{2+2M^2}{1+n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ Luego hay convergencia uniforme en $[-M,M]$.