ANÁLISIS DE VARIABLE REAL (M1): EXAMEN EXTRAORDINARIO

(30 DE JUNIO DE 2025)

Escribe cada pregunta en hojas separadas y tu nombre en todas las hojas. En todas las respuestas, enuncia claramente los resultados que vas a utilizar.

1. **(1 punto)**

   a) Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado, define los siguientes términos: $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ y $\min A$.

   b) Demuestra los siguientes resultados, **si son ciertos,** o encuentra un contraejemplo, **si son falsos:**

   (i) Si $A \subset B$, entonces $\sup A \leq \sup B$.

   (ii) Si $A \subset B$, entonces $\inf A \leq \inf B$.

   (iii) Si $A \subsetneq B$, entonces $\sup A < \sup B$.

2. **(1 punto)**

   a) Demuestra que la siguiente sucesión es monótona creciente y acotada superiormente:

   $$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = (x_n + 1/4)^2 \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Justifica que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge y calcula su límite.

   b) ¿Qué pasa si tomamos $x_1 = 1$ en la sucesión anterior?

3. **(1 punto)**

   Estudia y calcula, si existen, los siguientes límites:

   $$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} \right), \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2 - n + 7}{3n^2 + 4n - 1} \right)^{\frac{3n^2-7}{5n}}.$$

4. **(1 punto)**

   Estudia la convergencia, y la convergencia absoluta, de las siguientes series:

   $$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} 3^{-n}, \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.

El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

Revisión del examen: tendrá lugar el día 8 de Julio a las 9h en el despacho 437. **No** es obligatorio acudir a la revisión.

EXAMEN EXTRAORDINARIO. ANÁLISIS DE VARIABLE REAL (m1).

Segundo PARCIAL **30 de Junio de 2025 .**

5.- (1 punto) Comprueba si la siguiente función es continua en su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{2})}{x} & \text{si} \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \\ -1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{\int_0^{x^2} \cos(t^{1/2})dt}{\operatorname{sen}^2 x} & \text{si} \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

6.- (1 punto) Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función derivable en (a, b). Si $x_0 \in (a, b)$ es un mínimo local de f, prueba que $f'(x_0) = 0$.

7.- (1 punto) Prueba que la ecuación:

$$x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x = 0$$

tiene únicamente dos soluciones.

8.- (1 punto) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$.

9.- (1 punto) Calcula el volumen de revolución que se produce al girar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}(\cos x + 1)$, para $x \in [0, \pi]$, respecto del eje de las "x"(eje $y = 0$).

10.- (1 punto) Sea la función $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-\pi)^{2k}}{(2k)!}$. Calcula su serie de Taylor centrada en cero.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

Revisión del examen: tendrá lugar el día 8 de Julio a las 9h en el despacho 484. **No** es obligatorio acudir a la revisión.

EXAMEN

PROBLEMA 1:

a) $\sup A = \alpha$ $\quad$ α cota superior más pequeña de A

$\inf A = \beta$ $\quad$ β cota inferior más grande de A

$\max A$ $\quad$ supremo de A si $\sup A \in A$

$\min A$ $\quad$ ínfimo de A si $\inf A \in A$.

b) i) $\forall a \in A$ como $a \in B \Rightarrow a \leq \sup B$, luego $\sup B$ es cota superior de A y así $\sup A \leq \sup B$ ya que $\sup A$ es la cota superior de A más pequeña

ii) $\forall a \in A$ como $a \in B \Rightarrow \inf B \leq a$.

Ahora sea $B = [-1, 1]$ y $A = [0,1] \subseteq B$

$\inf A = 0 > \inf B = -1$ $\quad$ ii) no es cierta

iii) Sea $A = (0,1)$ y $B = [0,1]$, así $[0,1) \neq [0,1]$

y $\sup A = 1 = \sup B$ $\quad$ iii) no es cierta.

EXAMEN

PROBLEMA 2:

a) $x_1 = 0 \quad x_{n+1} = (x_n + 1/4)^2$

CRECIENTE: POR INDUCCIÓN $x_1 = 0 < x_2 = \frac{1}{16} > 0.$

SUPONGO QUE $x_n > x_{n-1}$, ENTONCES

$$x_n + \frac{1}{4} > x_{n-1} + \frac{1}{4} \geq 0 \Rightarrow \left(x_n + \frac{1}{4}\right)^2 = x_{n+1} > x_n = \left(x_{n-1} + \frac{1}{4}\right)^2$$

ACOTADA VEAMOS QUE $x_n \leq \frac{1}{4} \quad \forall n$

POR INDUCCIÓN: $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{6}$ SON MENORES

QUE $\frac{1}{4}$; SI $x_n \leq \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$x_{n+1} = \left(x_n + \frac{1}{4}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

COMO (x_n) ES CRECIENTE Y ACOTADA, TIENE LÍMITE

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n \{x_n\} = \ell.$$

AHORA COMO $x_n = \left(x_n + \frac{1}{4}\right)^2$ TOMANDO LÍMITES

$$\ell = \left(\ell + \frac{1}{4}\right)^2 \iff \ell = \ell^2 + \frac{1}{2}\ell + \frac{1}{16} \iff$$

$$0 = \ell - \frac{1}{2}\ell + \frac{1}{16} = \left(\ell - \frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\ell = \frac{1}{4}}$$

b) SI $x_1 = 1$ LA SUCESIÓN ES CRECIENTE, LA PRUEBA ES IGUAL

Y CLARAMENTE $x_n \geq 1 \quad \forall n$

$$x_{n+1} = \left(x_n + \frac{1}{4}\right)^2 = x_n^2 + \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{16} \underset{x_n \geq 1}{>} x_n + \frac{1}{16}$$

LUEGO $x_{n+k} \geq x_n + k\frac{1}{16} \underset{k\to\infty}{\uparrow} \infty$

PARA $x_1 = 1$, LA SUCESIÓN NO ESTÁ ACOTADA Y TIENDE A ∞.

EXAMEN

PROBLEMA 3:

a) $\frac{n}{\sqrt{n+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} < \frac{n}{\sqrt{n+1}}$

$\frac{1}{\sqrt{n+n}} < \frac{1}{\sqrt{n+k}} \quad \forall k = 1 \ldots n$ $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n+k}} \quad \forall k = 1 \ldots n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} = \infty$$

Por tanto $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} = \infty$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2-n+7}{3n^2+4n-1}\right)^{\frac{3n^2-7}{5n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-n+7}{3n^2+4n-1} = 1 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-7}{5n} = \infty$$

ESTAMOS ANTE UNA INDETERMINACIÓN 1^{∞}.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2-n+7}{3n^2+4n-1}\right)^{\frac{3}{5}n - \frac{7}{5n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{3n} + \frac{7}{3n^2}}{1 + \frac{4}{3}n - \frac{1}{3n^2}}\right)^{\frac{3}{5}n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2 \ldots}{3n^2 \ldots}\right)^{-\frac{7}{5n}} = 1$$

$\frac{7}{5}n \to 0$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-5n+8}{3n^2+4n-1}\right)^{\frac{3}{5}n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n^2+4n-1}{-5n+8}}\right)^{\frac{3}{5}n}$$

$3n^2-n+7 =$

$= 3n^2+4n-1 \quad -5n+8$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3n^2+4n-1}{-5n+8}}\right)^{\frac{3n^2+4n-1}{-5n+8}}\right]^{\frac{-5n+8}{3n^2+4n-1} \cdot \frac{3}{5}n} = e^{-1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-15n^2+24n}{15n^2+20n-5} = -1$$

EXAMEN

PROBLEMA 4:)

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} 3^{-n}$.

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n \leq e^n$

ya que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es creciente (teorían)

y $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$.

Luego $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{3^n} \leq \frac{e^n}{3^n} = \left(\frac{e}{3}\right)^n$

Ahora $\frac{e}{3} < 1$

teoría $e \in (2,3)$.

Como $\sum\left(\frac{e}{3}\right)^n < \infty$ (serie geométrica) y esta serie mayora a la de arriba, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} 3^{-n}$ es convergente.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ serie alternada

Ahora $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$.

Por el criterio de Abel la serie converge.

Para usar este criterio la sucesión $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ debe ser decreciente y lo es

¿ $\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} < \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$? $\iff \sqrt{n+2}+\sqrt{n} < 2\sqrt{n+1} \iff$

$(n+2)+n+2\sqrt{n+2}\sqrt{n} < 4(n+1) \iff \sqrt{n+2}\sqrt{n} < n+1 \iff$

$\iff (n+2)n < (n+1)^2 \iff \boxed{n^2+2n < n^2+2n+1}$

Esta última desigualdad es cierta, por la cadena de equivalencias es cierta la primera.

EXAMEN

PROBLEMA 5º] $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x+\pi/2)}{x} & \text{si } x \in [-\pi/2, 0) \\ \dfrac{\int_0^{x^2} \cos(t^{1/2})\,dt}{\operatorname{sen} 2x} & \text{si } x \in (0, \pi/2] \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Si $x \in [-\pi/2, 0)$ $\dfrac{\cos(x+\pi/2)}{x}$ es continua, $x \neq 0$.

y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{\cos(x+\pi/2)}{x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^-} \dfrac{-\operatorname{sen}(x+\pi/2)}{1} = -1$

Si $x \in (0, \pi/2]$ existe y es continua $\sqrt{t}$ y así $\int_0^{x^2} \cos(t^{1/2})\,dt$.

$\cos(t^{1/2})$ es continua y también lo es

Asimismo $\operatorname{sen} 2x \neq 0$ si $x \in (0, \pi/2]$. Luego f es continua en $(0, \pi/2]$. Ahora

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^{x^2} \cos(t^{1/2})\,dt}{\operatorname{sen} 2x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cancel{2x}\,\cancel{\cos x}}{\cancel{2\operatorname{sen} x}\,\cancel{\cos x}} = 1$

Como $f(0^-) \neq f(0^+)$ f no es continua en $x=0$, si lo es en $[-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}$.

PROBLEMA 6º] $f\,(a,b) \to \mathbb{R}$ derivable con $x_0 \in (a,b)$ mínimo relativo de f. ¿$f'(x_0)=0$?

Mínimo relativo $\exists\, \delta>0$ con $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b)$

por ser x_0 mínimo relativo tal que $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Como f es derivable existe $f'(x_0)$

$f'(x_0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, ahora

def. derivada

$\lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ ya que $f(x) \geq f(x_0)$ y $x-x_0<0$

y $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ ya que $f(x) \geq f(x_0)$ y $x > x_0$

Como $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sólo puede ocurrir que $f'(x_0) = 0$.

EXAMEN

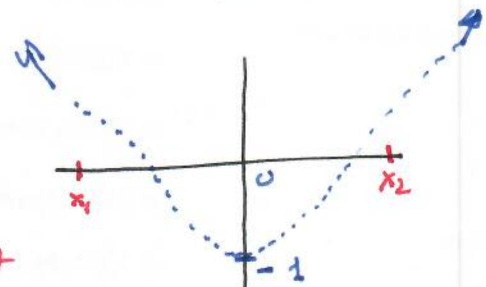
PROBLEMA 7º] $x^2 - x\,\text{sen}\,x - \cos x = 0$ ¿tiene solo dos soluciones?

Consideramos la función continua $f(x) = x^2 - x\,\text{sen}\,x - \cos x$ representándola. Dominio $\mathbb{R}$ allí es continua.

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2 - x\,\text{sen}\,x - \cos x = \infty.$$

$$f'(x) = 2x - \cancel{\text{sen}\,x} - x\cos x + \cancel{\text{sen}\,x} = x(2-\cos x).$$

Como $2-\cos x > 0 \ \forall x$, $f'(x) \begin{cases} <0 & \text{si } x<0 \text{ (decreciente)} \\ =0 & \text{si } x=0. \text{ mínimo} \\ >0 & \text{si } x>0 \text{ (creciente)} \end{cases}$



Ahora $f(0) = -1$, así

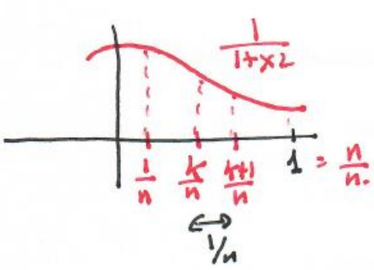
por el teorema de Bolzano f tiene una raíz negativa y tiene otra raíz positiva y no puede tener más ya que f decrece estrictamente en $(-\infty, 0)$ y ya que f crece estrictamente en $(0, \infty)$.

PROBLEMA 8º] $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^2+k^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} =$$

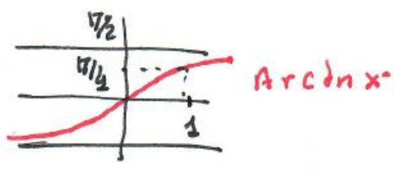
Sea $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $x \in [0,1]$

por ser f continua en $[0,1]$ y considerando la partición de $[0,1]$ en partes iguales



$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{Arctan}\,x \Big|_0^1 =$$

$$= \text{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{4}.$$



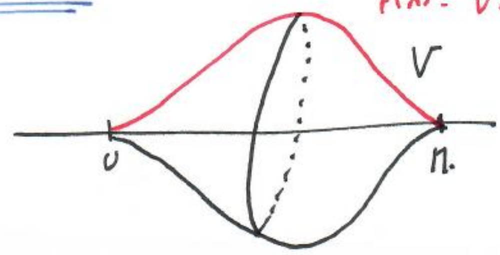
EXAMEN

PROBLEMA 9ª

$f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}\,(\cos x + 1)$, $x \in [0, \pi]$

$f \geq 0$ y

$f(0) = f(\pi) = 0$.



$$V = \int_0^{\pi} \pi \left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\,(\cos x + 1) \right)^2 dx =$$

$\downarrow$ fórmula del volumen

$$= \pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,(\cos x + 1)^2\, dx =$$

$u = \cos x$

$du = -\operatorname{sen} x\, dx$

$x = 0 \quad \cos 0 = 1$

$x = \pi \quad \cos \pi = -1$

$$= -\pi \int_1^{-1} (u+1)^2\, du = -\pi \left(\frac{(u+1)^3}{3} \right|_1^{-1}$$

$$= -\pi \left(0 - \frac{2^3}{3} \right) = \frac{2^3}{3}\pi \geq 0$$

(un valor positivo ¡como debe ser!)

PROBLEMA 10ª

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-\pi)^{2k}}{2k!}$$

Esto es una serie de potencias centrada en $x = \pi$. Ahora sabemos que

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$ para todo $x \in \mathbb{R}$ luego

$$f(x) = \cos(x - \pi) \underset{\downarrow}{=} \cos x \cos(-\pi) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(-\pi) =$$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$$= -\cos x = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$ serie de

potencias centrada en cero, que coincide con la correspondiente serie de Taylor.