

EXAMEN DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS.
9 de Enero de 2026.

1.- Dada la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$ estudia:

- a) La convergencia puntual de la serie cuando $x \in \mathbb{R}$.
- b) La convergencia uniforme en el intervalo $[a, +\infty]$ con $a > 0$.

2.- Calcula la serie de Fourier de la extensión periódica de la función

$$f(x) = e^{-|x|} - e^{-1} \quad \text{para} \quad x \in [-1, 1].$$

3.- Una de las tres gráficas del dibujo (A, B o C) es la solución del problema de Cauchy $\begin{cases} tx'(t) = x(t) \ln t \\ x(1) = 1 \end{cases}$ ¿Cual de ella es la solución? Explica tu respuesta.

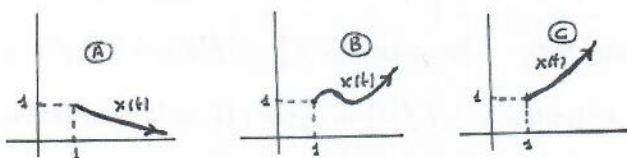


Figura 1:

4.- a) Sean g y h elementos de $(\mathbb{Z}_n^*, \times)$, grupo de las unidades de $\mathbb{Z}_n$. Calcula el inverso del elemento $(n-1)hg^{-1}$.
b) Resuelve el sistema

$$\begin{cases} x \equiv 2 & \text{mód } 17 \\ 2x \equiv 3 & \text{mód } 5 \end{cases}$$

5.- a) Encuentra todos los grupos conmutativos finitos de orden 900.
b) ¿En cuáles hay algún elemento de orden 180? Encuentra un elemento de orden 180 en cada caso.

6.- Prueba que $\mathbb{Z}_3[x]/\langle 2x^2 + 2x + 1 \rangle$ es un cuerpo. Describe sus elementos y encuentra el inverso de $[x^2 + 1]$.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.

El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

Revisión del examen:

.- **Presencial .**

.- Las soluciones del examen se podrán consultar en: <http://blogs.mat.ucm.es/cruizb/inicio/docencia-curso-22-23/ampliacion-de-matematicas/examenes-de-am/>

La revisión del examen se efectuará el día 26 de Enero a las 14h en el aula 7. No es obligatorio acudir a la revisión.

PROBLEMA 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2}$$

a) CONVERGENZA PUNTUALE.

SS $x=0$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{1+0} = 0$ LA SERIE CONVERGE PUNTUALMENTE.

SS $x \neq 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x}{1+n^2 x^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{x^2 (\frac{1}{x^2} + n^2)} =$

$$= \frac{1}{|x|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + n^2} < \frac{1}{|x|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ CONVERGENZA}$$

COMO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

LA SERIE DI FUNZIONI CONVERGE PUNTUALMENTE IN TUTTO $x \in \mathbb{R}$

b) CONVERGENZA UNIFORME

MAI LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + n^2}$ $x \in [a, \infty)$

INVECE MAI MAI $n \left| \frac{1}{x} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + n^2} \right| < \frac{1}{a} \frac{1}{n^2}$ $\forall x \geq a$.
 $x > a > 0$
 $\Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{a}$

COMO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a} \frac{1}{n^2} < \infty$, PER LA PARTITA

M-WEIERSTRASS LA SERIE DI FUNZIONI CONVERGE UNIFORMEMENTE IN $[a, \infty)$

PROBLEMA 24

SERIE DE FOURIER DE $f(x) = e^{-|x|} - e^{-1} \quad x \in [-1, 1]$

tomamos f LA EXTENSION 2-PERIÓDICA DE f EN $[-1, 1]$

f ES PAR YA QUE $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, LUEGO

LOS COEFICIENTES b_n DE LA SERIE SON NULOS ($b_n = 0 \quad \forall n$)

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 e^{-|x|} - e^{-1} dx = 2 \int_0^1 e^{-x} - e^{-1} dx =$$

f 2-PERIÓDICA

f PAR

$$= -2e^{-1} + 2 \int_0^1 e^{-x} dx = -2e^{-1} + 2 \left[-e^{-x} \right]_0^1 =$$

$$= -4e^{-1} + 2$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 (e^{-|x|} - e^{-1}) \cos n\pi x dx =$$

INTEGRANDO PAR

$$2 \int_0^1 e^{-x} \cos n\pi x dx - 2 \int_0^1 e^{-1} \cos n\pi x dx =$$

$$(\dots) \int_0^1 e^{-1} \cos n\pi x dx = e^{-1} \left[\frac{\sin n\pi x}{n\pi} \right]_0^1 = 0$$

$$(\dots) \int_0^1 e^{-x} \cos n\pi x dx = \left[-e^{-x} \cos n\pi x \right]_0^1 - n\pi \int_0^1 e^{-x} \sin n\pi x dx =$$

PARTE 1

$$= -e^{-1} \cos n\pi + 1 - n\pi \left[-e^{-x} \sin n\pi x \right]_0^1 + n\pi \int_0^1 e^{-x} \cos n\pi x dx =$$

$$= -e^{-1} \cos n\pi + 1 - n^2 \pi^2 \int_0^1 e^{-x} \cos n\pi x dx$$

$$(1 + n^2 \pi^2) \int_0^1 e^{-x} \cos n\pi x dx = 1 - e^{-1} \cos n\pi$$

DESDE AHORA

$$\text{Y ASÍ} \quad \int_0^1 e^{-x} \cos n\pi x dx = \frac{1 - e^{-1} (-1)^n}{1 + n^2 \pi^2}$$

$$= 2 \frac{1 - e^{-1} (-1)^n}{1 + n^2 \pi^2} - 2 \times 0 = \frac{2 - 2e^{-1} (-1)^n}{1 + n^2 \pi^2}$$

Y SON TAMBIÉN LA SERIE DE FOURIER DE f EN

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x = (1 - 2e^{-1}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2e^{-1} (-1)^n}{1 + n^2 \pi^2} \cos n\pi x$$

PROBLEMA 3:

$$\begin{cases} t x'(t) = x(t) \ln t \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

$t > 1$, cumu avem $x(1) = 1$, continuu
solutia $x > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{\ln t}{t} \\ x(1) = 1 \end{cases} \quad \text{e.r. u nt variabil separabile}$$

Integrăm:

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int \frac{\ln t}{t} dt = \ln |x(t)|$$

$$\int \frac{\ln t}{t} dt = \frac{\ln^2 t}{2} + k$$

$(\ln t)' = \frac{1}{t}$

Ass $\ln |x(t)| = \frac{\ln^2 t}{2} + k \Rightarrow |x(t)| = e^{\frac{\ln^2 t}{2} + k} =$

$$= e^k (e^{\ln t})^{\frac{\ln t}{2}} \quad \text{cumu e k constanta}$$

temem $x(t) = M(t)^{\frac{\ln t}{2}} \quad M = 1$

si $x(1) = 1 \Rightarrow x(1) = M^{\frac{\ln 1}{2}} \quad M = 1$

Avem solutia $x(t) = t^{\frac{\ln t}{2}}$

Avem $t > 1$ t is constant $y^{\frac{\ln t}{2}}$ + constant $t > 0$
 $x(t)$ is constant si $x > 1$ (in general solutia is $\ln C$)

PROBLEMA 4:

a) $g, h \in \mathbb{Z}_n^*$ $(n-1) \in \mathbb{Z}_n^*$ y^A cu $(n-1)(n-1) = n^2 - 2n + 1 \equiv 1 \pmod n$

Ass $((n-1) \times h \times y^{-1})^{-1} = g \times h^{-1} \times n-1$

$t > 0$ $g \times h^{-1} \times n-1 \in \mathbb{Z}_n^*$ - ADE MAI $g \times h^{-1} \times n-1 \times (n-1) \times h \times y^{-1} =$

$$= g \times h^{-1} \times h \times y^{-1} = g \times y^{-1} = 1$$

b) $x \equiv 2 \pmod{12}$

$2x \equiv 3 \pmod{5}$

$x \equiv 2 \pmod{12}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \equiv 2 \\ x \equiv 3+3 \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$

$x = 2 \times 7 \times 5 + 4 \times 3 \times 12 = 70 + 112 = 182 \pmod{85}$

Ass $x \equiv 19 \pmod{85}$

$$\begin{array}{r} 182 \\ 19 \\ \hline 19 \end{array} \quad \begin{array}{r} 85 \\ 2 \\ \hline 19 \end{array}$$

compararea $\begin{array}{r} 19 \\ 4 \end{array} \begin{array}{r} 15 \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 19 \\ 2 \end{array} \begin{array}{r} 17 \\ 1 \end{array}$

PROBLEMA 5^a

a) $900 = 9 \times 100 = 3^2 \times (2 \times 5)^2 = 3^2 \times 2^2 \times 5^2$

Donde la estructura de CLASIFICACIÓN de Gálvez
CONMUTATIVAS GÉNICA:

ORDEN MÁXIMO EN CATEGORÍA

PASA $S = 1$

teniendo $(\mathbb{Z}_{900}^+)$

$\text{mcm}(2, 450) = 450$

PASA $S = 2$

teniendo $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{450}^+)$

$\text{mcm}(3, 300) = 300$

$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{300}^+)$

$\text{mcm}(5, 180) = 180$

$(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{180}^+)$

$\text{mcm}(6, 150) = 150$

$(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{150}^+)$

$\text{mcm}(10, 90) = 90$

$(\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{90}^+)$

$\text{mcm}(15, 60) = 60$

$(\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{60}^+)$

$\text{mcm}(30, 30) = 30$

$(\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{30}^+)$

b) $180 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ ASS $180 \mid 900$ y $180 \mid 180$ subampliable

ASS $5 \in (\mathbb{Z}_{900}^+)$ y $5 + \underbrace{180 \text{ veces}}_{+5} = 180 \times 5 = 900 \equiv 0 \pmod{900}$

$\text{ord } 5 = 180$ en $(\mathbb{Z}_{900}^+)$

ASS $(1,1) \in (\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{180}^+)$

$(1,1) + \dots + (1,1) = (180, 180) \equiv (0,0) \pmod{180}$
 $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{180}$

PROBLEMA 6:

$$\mathbb{Z}_3[x] / (2x^2 + 2x + 1)$$

$\mathbb{Z}_3$ is univ. commutative

$\mathbb{Z}_3[x]$ is univ. commutative

$f(x) = 2x^2 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ is univ. commutative

$$f(0) = 1 \neq 0$$

$$f(1) = 2 + 2 + 1 = 2 \pmod{3}$$

$$f(2) = 8 + 4 + 1 = 1 \pmod{3}$$

Since f is irreducible in $\mathbb{Z}_3$

then $(2x^2 + 2x + 1)$ is univ. commutative

$$\mathbb{Z}_3[x] / (2x^2 + 2x + 1)$$

$$= \{ ax + b : a, b \in \mathbb{Z}_3 \}$$

cardinal of $\mathbb{Z}_3[x] / (2x^2 + 2x + 1)$ is 9

$$[x^2 + 1] \text{ mod } (2x^2 + 2x + 1)$$

$$\text{Ass } x^2 + 1 = 2(2x^2 + 2x + 1) + 2x + 2$$

is it invertible mod $2x + 2$?

$$\text{in } (\mathbb{Z}_3[x] / (2x^2 + 2x + 1))$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 2x + 1 \\ - 2x^2 - 2x \\ \hline 1 \end{array}$$

comparisons

$$\begin{array}{r} 2x + 2 \\ 2x \\ \hline x^2 + x \end{array}$$

$$\text{Ass } 2x^2 + 2x + 1 = x(2x + 2) + 1$$

$$[2x^2 + 2x + 1] = 0 \Rightarrow -1 = x(2x + 2)$$

$$1 = 2x(2x + 2) \text{ y } \text{Ass } [2x + 2]^{-1} = [2x]$$

$$\begin{array}{r} x^2 + x \\ - x^2 - x - 2 \\ \hline 1 \end{array}$$