

$$1 + e^{i\pi} = 0$$

Tema 7: Los números complejos

7.1. Introducción

La ecuación $x + 1 = 0$ tiene por solución $x = -1$. ¿Existe algún número x tal que $x^2 + 1 = 0$?

1. Representar la parábola $y = x^2$. Representar la recta $y = -1$. ¿Tienen algún punto en común la parábola y la recta? Parece que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución.

Definición: Llamamos i , número imaginario, a un "número" que tiene la propiedad de que $i^2 = -1$.

¡Esto parece de locos! En 1575 Bombelli, un matemático italiano, habló del "pensamiento loco" respecto del número i . ¡Hagamos unas cuantas locuras y veamos a dónde nos llevan!

2. Resolver la ecuación $x^2 - 2x + 5 = 0$.

- Las soluciones serán $\frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$.
- Mirad $\sqrt{-16} = \sqrt{16(-1)} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = 4i$.
- Las soluciones de la ecuación anterior serán de forma $1 + 2i$ y $1 - 2i$.
- ¡Unos números raros! Hagamos como si fuesen números normales.

3. Sumar $3 + 2i$ con $7 + 3i$. Restar $2 + 7i$ con $2 - 6i$. Multiplicar $1 + i$ con $3 + 2i$.

Indicación: Como no sabemos sumar la i la sacamos factor común. Además $i^2 = -1$.

Veamos ahora que pasa si multiplicamos las dos soluciones de 2.

$$(1 + 2i) \times (1 - 2i) = \text{suma por diferencia} \dots = 1^2 - (2i)^2 = 1 - (4)(-1) = 5$$

¡Un número normal!

4. Dividir $3 + 2i$ entre $1 + 2i$. **Indicación:** $\frac{3+2i}{1+2i} = \frac{3+2i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i}$.

Definición: Se llaman números complejos a los que se escriben de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales ($a, b \in \mathbb{R}$).

$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ conjunto de los números complejos.

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$ son dos números complejos, se definen:

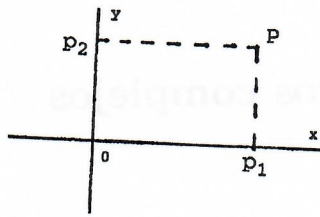
- **la suma:** $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- **el producto:** $(a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Si $z = a + bi$ es un número complejo se llama **conjugado** de z al número complejo $\bar{z} = a - bi$.

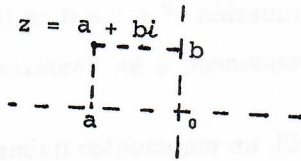
5. Si $z = a + bi$, comprobar que $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$.

7.2. Representación gráfica de un número complejo

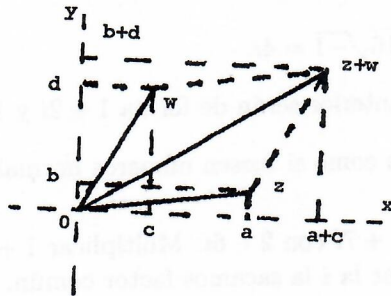
En el siglo XVII Descartes inventó los ejes y las coordenadas que llevan su nombre. Todo punto P del plano tiene unas coordenadas cartesianas (p_1, p_2) .



Un número complejo $z = a + bi$ no es más que un par de números reales, a y b , junto al número imaginario i . Así podemos representar z del siguiente modo:



6. Representar los números complejos: i , $1 - 2i$ y $1 + 2i$.
Además si $z = (a + bi)$ y $w = (c + di)$, $z + w = (a + c) + (b + d)i$



¡La suma de complejos se corresponde a la suma de vectores!

7. Sean $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$ complejos conjugados. Representar z y \bar{z} gráficamente. ¿Qué representa $z \times \bar{z}$?

Indicación: para esta última cuestión usar 5. y recordad el teorema de Pitágoras.

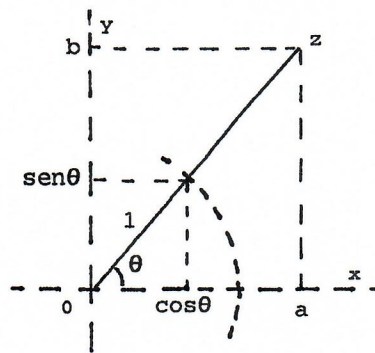
¡Parece que lo que estamos haciendo cobra algún sentido!

Definición: Se llama *módulo* de un número complejo $z = a + bi$ a la distancia del número complejo al origen de coordenadas. Se denota por $|z|$ y se calcula como: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

8. Sea $z = 1 + i$. Representar z en el plano. Calcular el ángulo que forma el segmento Oz con el eje de las x . Multiplicar z por i . Representar $z \times i$.

Sea $z = a + bi$, representado en la siguiente figura. Teniendo en cuenta el teorema de Tales:

$$\frac{a}{\cos \theta} = \frac{b}{\sin \theta} = \frac{|z|}{1}$$



9. Según el dibujo anterior, comprobar que $z = a + bi$ se puede escribir como: $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ (*)

Definición: Al ángulo θ formado por Oz y el eje de las x se le llama argumento de z .

A la expresión (*) se le llama forma polar del número complejo z . (Un punto del plano, o lo que es lo mismo un número complejo, viene determinado por su módulo y su argumento. La expresión (*) también se puede escribir como $z = |z|e^{i\theta}$).

10. Sean $z = 1 + i$, i y $z \times i$. Escribir en su forma polar estos tres números complejos. ¿Qué le ocurre a z cuando lo multiplicamos por i ?

11. Si $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ y $w = |w|(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$, comprobar que

$$z \times w = |z||w|(\cos(\theta + \beta) + i \operatorname{sen}(\theta + \beta))$$

Indicación: recordad que $\cos(\theta + \beta) = \cos \theta \cos \beta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta$ y que $\operatorname{sen}(\theta + \beta) = \cos \theta \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \theta \cos \beta$.

Este último resultado no se descubrió hasta principio del siglo XIX y entre otros fué descubierto por Gauss, aquel niño que sumaba tan rápido.

12. Si $n \in \mathbb{N}$ y $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, comprobar que

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$$

Calcular $(1 + i)^3$ y $(1 + i)^8$.

13. Calcular $\sqrt[3]{i}$.

Indicación: hay que encontrar $w \in \mathbb{C}$ con la propiedad de que $w^3 = i$. Usar 12. Tienen que salir 3 raíces distintas.

14. Calcular $\sqrt[4]{-1}$ y $\sqrt[4]{1}$. En cada caso, representar gráficamente las cuatro raíces distintas que salen.

Bien, ¿y para qué sirve todo lo anterior? Los números complejos son muy útiles. Sin ellos tu teléfono móvil no funcionaría. ¡Quizás el futuro se esté describiendo con ellos!

Definición: Un *qubit* (bit cuántico) es un estado cuántico en el espacio vectorial complejo bidimensional.

RAFAEL BOMBELLI



Rafael Bombelli nació en enero de 1526 en Bolonia (Italia). Era uno de los seis hijos de Antonio Mazzoli que cambió su apellido por el de Bombelli. La familia Mazzoli era una noble y rica familia a la que le habían sido confiscadas todas sus propiedades, debido al apoyo que había dado a la familia Bentivoglio en sus disputas con el Papa Julio II. Fue Antonio, padre de Rafael, el que logró recuperar sus propiedades y pudo volver a Bolonia.

Rafael Bombelli no recibió una educación universitaria, sino que adquirió su formación con el ingeniero y arquitecto Pier Francesco Clementi. El propio Bombelli eligió la profesión de ingeniero y arquitecto, trabajando para Rufini, un noble romano que llegaría a obispo de Melfi. No se sabe exactamente como adquirió Bombelli su interés por las matemáticas, probablemente el motivo fue que vivía en la región de Italia donde se desarrollaban

los desafíos matemáticos entre Cardano, Tartaglia y otros, con el fin de resolver ecuaciones.

Su patrón Alejandro Rufini le encargó un proyecto para desecar las marismas del valle de Chiana. Aunque este trabajo no llegó a terminarse, Bombelli con su proyecto adquirió una gran reputación en ingeniería hidráulica. En 1561 Bombelli va a Roma a reparar el puente de Santa María sobre el Tíber. A pesar del fracaso del puente su fama como ingeniero no sufrió ninguna merma.

En una de sus visitas a Roma, Bombelli hizo un gran descubrimiento matemático. Antonio María Pazzi, profesor de matemáticas en la universidad de Roma, le enseñó a Bombelli un manuscrito de la Aritmética de Diofanto y los dos decidieron hacer conjuntamente una traducción del mismo. A pesar de que nunca llegaron a completar la traducción, Bombelli, a la luz del texto de Diofanto comenzó a revisar sus conocimientos de álgebra. De hecho, en su libro III, 143 de los 272 problemas que aparecen son originales de Diofanto, hecho que el propio Bombelli reconocía.

La obra de Bombelli titulada "Álgebra" está dividida en cinco libros. Los tres primeros fueron publicados en 1572, y anunciaba que los libros IV y V, dedicados a la geometría, aparecerían seguidamente. Desgraciadamente Bombelli nunca llegó a publicar estos volúmenes porque la muerte se lo impidió. Murió en 1573, probablemente en Roma. En 1923, un manuscrito de Bombelli fue descubierto en una biblioteca de Bolonia. Además de una versión manuscrita de los tres libros ya publicados, había un manuscrito

inconcluso de los otros dos libros. La geometría incompleta de Bombelli fue publicada en 1929, y en ella se aprecia una influencia de los procedimientos geométricos de Omar Khayyam.

En el Álgebra de Bombelli se dan las reglas de los signos, que aún hoy dan tantos problemas a los estudiantes, para operar con números positivos y negativos. Además fue el primero que escribió las reglas para la suma, resta y multiplicación de los números complejos. Además demostró que usando el cálculo de los números complejos podían resolverse ecuaciones. Bombelli usó una notación muy sofisticada para su tiempo. Es justo reconocer a Bombelli como el inventor de los números complejos y su Álgebra tuvo una influencia capital en Leibniz.

Bombelli, un ingeniero, hizo un uso práctico de los números complejos porque dichos números le daban resultados útiles. El Álgebra de Bombelli es uno de los más importantes trabajos matemáticos del siglo XVI, y fue el único que dio importancia a los números complejos cuándo aún nadie se la daba.

VOLVER A BIOGRAFÍAS