LA INTEGRAL A LO LARGO DE CAMINOS

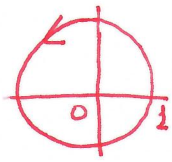
Una curva paramétrica en $\mathbb{R}^2$ es una aplicación continua

$$\gamma: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

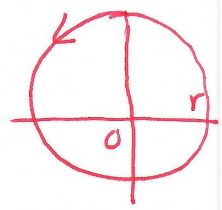
que asimilamos a su imagen $\gamma([a,b]) = \gamma^*$

Ejemplo

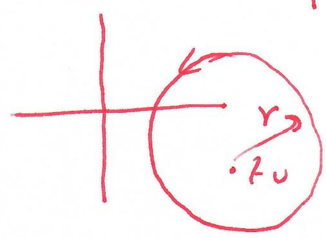
$\gamma(t) = e^{it} \quad t \in [0,2\pi]$



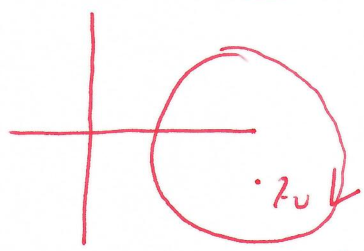
$\gamma_r(t) = re^{it} \quad t \in [0,2\pi]$



$\gamma(t) = z_0 + re^{it}$



$\gamma(t) = z_0 + re^{-it}$



Observación: Si γ es una curva paramétrica, γ^* es un cerrado de $\mathbb{C}$ y por tanto $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ es un abierto que puede tener distintas componentes conexas.

Caminos y ciclos:

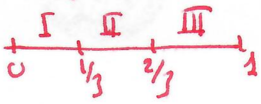
Def Sea $\gamma: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una curva paramétrica y $\gamma^* = \gamma([a,b])$ su imagen

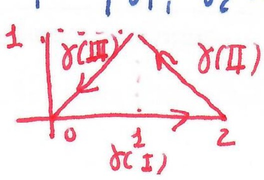
a) Se dice que γ es un camino si es continuamente diferenciable a trozos (e.d. $\exists\, P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ partición de $[a,b]$ tal que $\gamma|_{[t_i, t_{i+1})}$ $i = 0, \dots, n-1$ es diferenciable con derivada continua)

b) Se dice que un camino es cerrado si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

c) Se llama ciclo Γ a un conjunto finito de caminos cerrados: $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ y $\Gamma^* := \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \cup \dots \cup \gamma_n^*$

Ejemplo



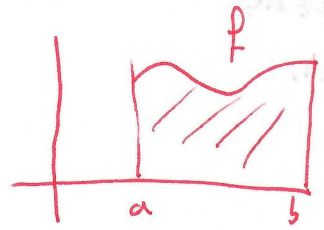


$$\gamma: [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \longrightarrow \gamma(t) = \begin{cases} 6t & t \in [0, 1/3] \\ 3-3t + i(3t-1) & t \in [1/3, 2/3] \\ 3-3t + i(3-3t) & t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

LA INTEGRAL DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Ejemplos

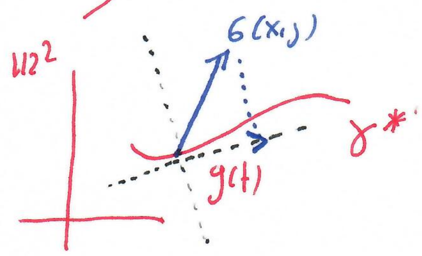
1:)



$\int_a^b f$ - AREA

- FORMA DE CALCULARLA: SI $\exists F$ con $F' = f \Rightarrow \int_a^b f = F(b) - F(a)$

2:) SEA $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ CAMINO



$$\int_\gamma G(l)\,dl \overset{DEF}{\underset{(*)}{=}} \int_a^b G\circ\gamma(t)\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

(*) VER NOTAS

PRODUCTO ESCALAR

$$= \int_a^b \underbrace{G\circ\gamma(t)\cdot\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}}_{g(t)}\,\|\gamma'(t)\|\,dt =$$

$$= \int_a^b g(t)\cdot\|\gamma'(t)\|\,dt$$ (SE CALCULA COMO 1:)) $\left\{ \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt \right.$, LONGITUD DE LA CURVA

$g(t)$ COMPONENTE TANGENCIAL DE G, LA INTEGRAL ES "FUERZA" × "LONGITUD" = TRABAJO.

DEF SEA γ UN CAMINO EN $\mathbb{C}$ y $f: \gamma^* \to \mathbb{C}$ CONTINUA, SE DEFINE

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

PRODUCTO DE COMPLEJOS

$$= \int_a^b Re(f\circ\gamma\cdot\gamma')\,dt + i\int_a^b Im(f\circ\gamma\cdot\gamma')\,dt \in \mathbb{C}$$

DONDE $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$.

OBSERVACIÓN ¿TIENE ALGÚN SIGNIFICADO ESTA INTEGRAL? EN PRINCIPIO NO. ES UNA DEFINICIÓN ANÁLOGA A LA DE 2:), DIFERENTE Y SIN SENTIDO FÍSICO. ES UNA HERRAMIENTA NUEVA QUE COMO SE VERÁ TIENE CONSECUENCIAS MUY INTERESANTES.

EJEMPLO 1

1:) SI $F' = f$ $\Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ CONTINUA (POR TANTO $F \in H(\Omega)$ Y SATISFACE CAUCHY-RIEMANN)

Y $\gamma [a,b] \to \Omega$ ES UN CAMINO

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma F'(z)\,dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

$DF(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = F'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$

$$= \int_a^b DF(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

REGLA DE BARROW

EN PARTICULAR SI γ ES UN CAMINO CERRADO ($\gamma(b) = \gamma(a)$) SE TIENE QUE $\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0}$

$\forall f\ \Omega \to \mathbb{C}$ TAL QUE $\exists$ F PRIMITIVA Y γ UN CAMINO CERRADO

2:) SEA $f_n(z) = a_n(z-a)^n$, $a_n, a \in \mathbb{C}$, $f_n \in H(\mathbb{C})$

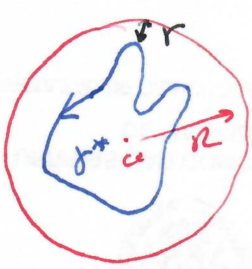
SI $F_n(z) = \dfrac{a_n(z-a)^{n+1}}{n+1} \Rightarrow F_n' = f$

ASÍ $\int_\gamma a_n(z-a)^n\,dz = 0$ $\forall \gamma$ CAMINO CERRADO

(*) $f_n \to f$ UNIFORM EN Ω $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re} f_n \to \mathrm{Re} f$ Y $\mathrm{Im} f_n \to \mathrm{Im} f$ EN Ω

3:) SEA $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ ANALÍTICA EN $\overline{D(a,R)}$, POR TANTO CON CONVERGENCIA UNIFORME (*), Y SEA γ CAMINO CERRADO CON $\gamma^* \subseteq D(a,r)$

NOTA γ^* COMPACTO, $\partial D(a,r)$ COMPACTO, $\gamma^* \cap \partial D(a,r) = \emptyset$ $\Rightarrow \exists$ $R' < R$ CON $\gamma^* \subseteq \overline{D(a,R')} \subsetneq D(a,R)$.



ASÍ $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\gamma(t)-a)^n\cdot\gamma'(t)\,dt =$ COMO HAY CONVERGENCIA UNIFORME

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n(\gamma(t)-a)^n\gamma'(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_\gamma a_n(z-a)^n\,dz = 0$$

PROBLEMA: ¿SERÁ CIERTO QUE SI $f \in H(\overline{D(a,R)})$, Y $\gamma^* \subseteq D(a,R)$ γ CAMINO CERRADO $\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0$? LA RESPUESTA ES POSITIVA Y ES EL TEOREMA DE CAUCHY.

51°

PROPIEDADES SEAN $z_0 \in \mathbb{C}$, f, g $\Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ CONTINUAS Y γ^* UN CAMINO DENTRO DE Ω.

a) $$\int_\gamma z_0 \cdot f(z)\,dz = z_0 \int_\gamma f(z)\,dz$$

b) $$\int_\gamma (f+g)(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\gamma g(z)\,dz$$

c) SI $h : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ ES CONTINUA, ENTONCES

$$\left| \int_a^b h(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |h(t)|\,dt$$

d) $$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \|f\|_\infty \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt}_{\text{LONGITUD DE LA CURVA}}$$

$\|f\|_\infty = \sup\{|f(\gamma(t))| : t \in [a,b]\}$
f CONTINUA SOBRE UN COMPACTO ALCANZA SU SUPREMO

DEM

Ejercicio

a) $$\int_\gamma z_0 f(z)\,dz = \int_a^b z_0 \cdot f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \operatorname{Re} z_0 \cdot \operatorname{Re}(f\circ\gamma \cdot \gamma')\,dt - \int_a^b \operatorname{Im} z_0 \operatorname{Im} f\circ\gamma\cdot\gamma'\,dt +$$

$$+ i\left[\int_a^b \operatorname{Re} z_0 \operatorname{Im} f\circ\gamma\,\gamma'\,dt + \int_a^b \operatorname{Im} z_0 \operatorname{Re} f\circ\gamma\cdot\gamma'\,dt\right] =$$

SACANDO $\operatorname{Re} z_0$ Y $\operatorname{Im} z_0$ DE LAS INTEGRALES QUEDA

$$= z_0 \cdot \int_a^b f\circ\gamma(t)\cdot\gamma'(t)\,dt = z_0 \int_\gamma f(z)\,dz$$

Ejercicio

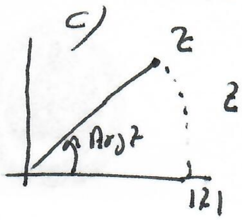
b) $$\int_\gamma f+g(z)\,dz = \int_a^b (f+g)(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b f\,\gamma(t)\cdot\gamma'(t) + g(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt =$$

PASANDO A PARTE REAL E IMAGINARIA Y USANDO LAS PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DE RIEMANN PARA FUNCIONES DE VARIABLE REAL

$$\int_a^b f\circ\gamma\cdot\gamma'\,dt + \int_a^b g\circ\gamma\cdot\gamma'\,dt = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\gamma g(z)\,dz$$

c)



$z \cdot e^{-i\operatorname{Arg} z} = |z|$

SEA $z = \int_a^b h(t)\,dt \in \mathbb{C}$ $\exists \alpha = e^{-i\operatorname{Arg} z}$ CON $|\alpha| = 1$ Y TAL QUE $\alpha \cdot z = |z|$.

SEA $u = \operatorname{Re} \alpha \cdot h$ ENTONCES $u \leq |\alpha h| = |h|$.

ASI $\left|\int_a^b h(t)\,dt\right| = \underbrace{\alpha \int_a^b h(t)\,dt}_{\in\mathbb{R}} = \int_a^b \alpha h(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt \leq \int_a^b |h(t)|\,dt.$

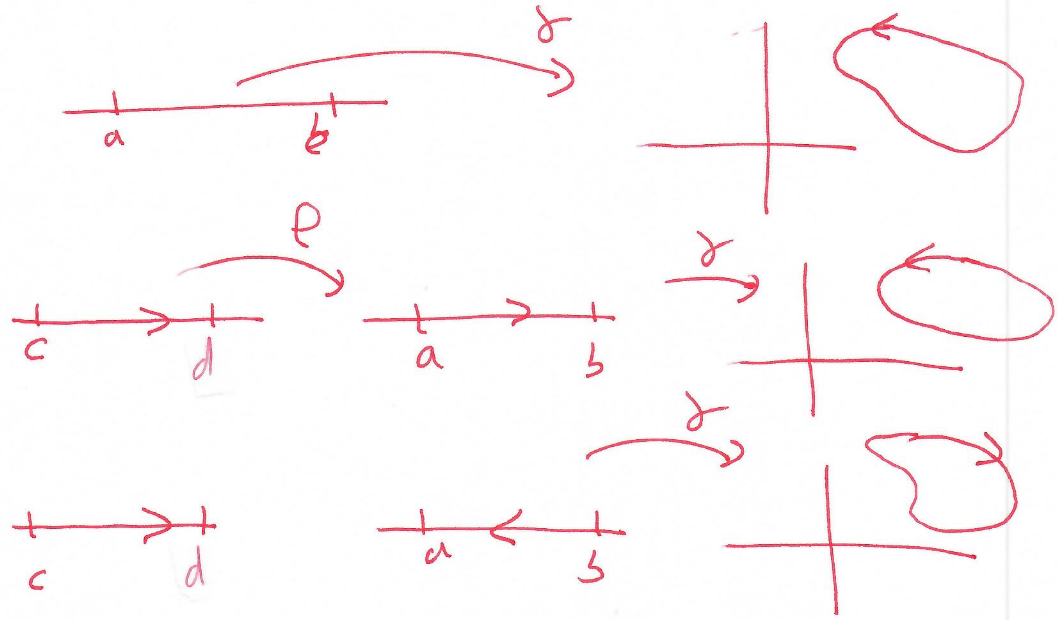
ORIENTACIÓN DE LOS CAMINOS

PROPIEDAD SEA $f:\Omega\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ CONTINUA SOBRE EL ABIERTO Ω. SEA $\gamma:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ UN CAMINO CON $\gamma^*\subseteq\Omega$. SI $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ ES BIYECTIVA

a) Y SI $\varphi'>0$, ENTONCES $\displaystyle\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz=\int_\gamma f(z)\,dz$

b) Y SI $\varphi'<0$, ENTONCES $\displaystyle\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz=-\int_\gamma f(z)\,dz$

OBSERVEMOS QUE EL SIGNO DE LA INTEGRAL DEPENDE DE LA ORIENTACIÓN DE LA CURVA



DEM $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz=\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt=$

CAMBIO DE VARIABLE
$t=\varphi(s)$.
$dt=\varphi'(s)\,ds$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_c^d f(\gamma(\varphi(s)))\cdot\gamma'(\varphi(s))\cdot\varphi'(s)\,ds=\int_c^d f((\gamma\circ\varphi)(s))\cdot(\gamma\circ\varphi)'(s)\,ds=\int_{\gamma\circ\varphi}f(z)\,dz & \varphi'>0\\[2ex] \displaystyle\int_d^c f(\gamma(\varphi(s)))\cdot\gamma'(\varphi(s))\,\varphi'(s)\,ds=-\int_c^d f(\gamma\circ\varphi(s))\,(\gamma\circ\varphi)'(s)\,ds=-\int_{\gamma\circ\varphi}f(z)\,dz & \varphi'<0\end{cases}$$

EJEMPLOS 2:

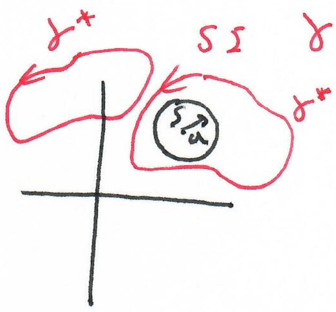
¿Todas las integrales de funciones de variable compleja se anulan? La respuesta es no.

4:) Sea $g_n(z) = \frac{b_n}{(z-a)^n}$, $n \geq 2$, si $G_n(z) = \frac{b_n}{(1-n)(z-a)^{n-1}}$

entonces $G_n'(z) = g_n(z)$ y si γ es un camino cerrado con $a \notin \gamma^*$

Así $\int_\gamma \frac{b_n}{(z-a)^n}\, dz = 0$

5:) Sea $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n}$ con dominio de convergencia uniforme $\mathbb{C} - \overline{D(a,s)}$



Si γ es un camino cerrado en $\mathbb{C} - \overline{D(a,s)}$ se sigue que

$$\int_\gamma g(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma \frac{b_n}{(z-a)^n}\,dz = b_1 \int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

↓ convergencia uniforme

6:) Sea $a \in \mathbb{C}$ y sea $r > 0$. Sea $\gamma_1(t) = a + re^{it}$ $t \in [0, 2\pi)$ la circunferencia de centro a y radio r orientada positivamente, entonces

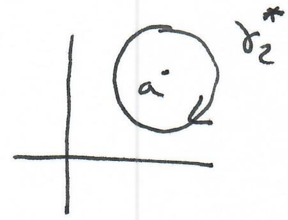
Ejercicio

(*) $\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-a}\,dz = 2\pi i$

$\iff \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-a}\,dz = 1$

7:) Sea $a \in \mathbb{C}$ y sea $\gamma_2 = a + re^{-it}$

Ejercicio



(*) $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z-a}\,dz = -2\pi i$

$\iff \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-a}\,dz = -1$

Dem: $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z-a}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + re^{-it} - a} \cdot (-ri)e^{-it}\,dt = -i \int_0^{2\pi} dt = -i2\pi.$

Observación A) La orientación de la curva influye en el resultado de la integral.

B) Las integrales (*) "miden" el número de vueltas que da γ alrededor de a ¡¡sentido geométrico!!