FUNCIÓN ÍNDICE

DEF Sea γ un camino cerrado y sea $\Omega = \mathbb{C} - \gamma^*$ el abierto complementario. Se define el índice de $a \in \Omega$ respecto a γ por

$$\operatorname{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} \qquad z \in \Omega.$$

OBSERVACIÓN: Si γ es una circunferencia de centro a orientada positivamente $\operatorname{Ind}_\gamma(a)$ es el número de veces que la curva rodea al centro. Veremos más adelante que lo anterior no es más que el caso particular de una propiedad general

TEOREMA: Sea γ un camino cerrado y sea

$$\operatorname{Ind}_\gamma \; \mathbb{C} - \gamma^* \longrightarrow \mathbb{C}$$

la función índice asociada. Es holomorfa y

a) $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{C} - \gamma^*$

b) $\operatorname{Ind}_\gamma$ es constante sobre las componentes conexas de $\mathbb{C} - \gamma^*$

c) $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0 \quad \forall z$ perteneciente a la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} - \gamma^*$

DEM LEMA Sea Ω abierto y sean $\psi, \varphi\; [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{C}$. dos curvas paramétricas continuas con

$$\varphi([\alpha,\beta]) \cap \Omega = \emptyset$$

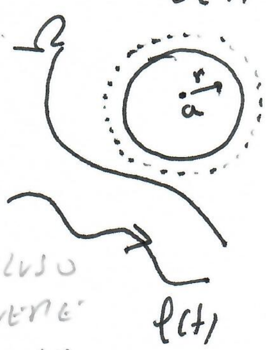
Se define $f(z) = \int_\alpha^\beta \frac{\psi(t)}{\varphi(t)-z}\,dt \qquad z \in \Omega.$

Se tiene que f es analítica en Ω y por tanto $f \in H(\Omega)$

OBSERV: Este lema será esencial para probar más adelante que $f \in H(\Omega) \Rightarrow f$ analítica en Ω.

DEM (DEL LEMA)

SEA $a \in \Omega$ y SEA $R > r > 0$ con $D(a,r) \subsetneq \overline{D(a,R)} \subset \Omega$.



(*) ¡Incluso φ puede ser la frontera de Ω!

$$\forall z \in D(a,r) \quad \left| \frac{z-a}{\varphi(t)-a} \right| \leq \frac{|z-a|}{r} < 1$$ (*) PRUEBA M-WEIERSTRASS

como $\varphi(t) \notin \Omega \Rightarrow |\varphi(t)-a| > r$

Por tanto la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\varphi(t)-a)^{n+1}} = \frac{1}{\varphi(t)-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(z-a)}{(\varphi(t)-a)}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{\varphi(t)-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{\varphi(t)-a}} = \frac{1}{\varphi(t)-z}$$

ASÍ

$$\frac{\psi(t)}{\varphi(t)-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\varphi(t)-a)^{n+1}} \psi(t) \quad \forall z \in D(a,r)$$

con convergencia uniforme sobre $t \in [\alpha,\beta]$ por (*).

ASÍ

$$f(z) = \int_\alpha^\beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\varphi(t)-a)^{n-1}} \psi(t)\, dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\int_\alpha^\beta \frac{\psi(t)}{(\varphi(t)-a)^{n+1}} dt \right)}_{\overset{\text{DEF}}{=}\ a_n} (z-a)^n \quad \forall z \in D(a,r)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \forall z \in D(a,r).$$

—o—

DEM (DEL TEOREMA) SEA $\Omega : \mathbb{C} - \gamma^*$

a) $$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\eta}{\eta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt$$

$\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$

tomando $\psi(t) = \gamma'(t)$ (continua a trozos por definición)

y $\varphi(t) = \gamma(t)$ con $\varphi([\alpha,\beta]) = \gamma^* \cap \Omega = \emptyset$ (*)

Por el lema anterior Ind_γ es analítica en Ω, así $\text{Ind}_\gamma \in H(\Omega)$.

a) VEAMOS QUE $\operatorname{Ind}_\gamma \in \mathbb{Z}$

TENDREMOS EN CUENTA QUE:

$$\text{SI } w \in \mathbb{C} \text{ y } e^{w} = 1 \iff \frac{w}{2\pi i} \in \mathbb{Z}.$$

(VER HOJA 44, SOBRE PROPIEDADES DE e^z)

SEA $\phi(t) = e^{\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\, ds}$, $\phi\ [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$

AHORA $\phi'(t) = \phi(t) \dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$ Y ASÍ

(VER EJERCICIO 4 - HOJA 3-)

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} \quad (*)$$

[(*) SALVO QUIZÁS EN UNA CANTIDAD FINITA DE PUNTOS "t" DONDE γ' NO ESTÁ DEFINIDA]

ASÍ $\dfrac{\phi(t)}{\gamma(t)-z} = \dfrac{\phi'(t)}{\gamma'(t)}$ ES UNA FUNCIÓN CONTINUA EN $[\alpha,\beta]$ CUYA DERIVADA ES NULA A TROZOS

$$\left(\left(\frac{\phi(t)}{\gamma(t)-z}\right)' = \frac{\phi'(t)(\gamma(t)-z) - \phi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)^2} \underset{(*)}{=} 0 \right)$$

ASÍ POR SER $\dfrac{\phi(t)}{\gamma(t)-z}$ CONTINUA EN TODO $[\alpha,\beta]$, ES CONSTANTE. ADEMÁS $\phi(\alpha) = e^0 = 1$, COMO

$$\frac{\phi(\alpha)}{\gamma(\alpha)-z} = \frac{\phi(t)}{\gamma(t)-z} \quad \forall t \in [\alpha,\beta]$$

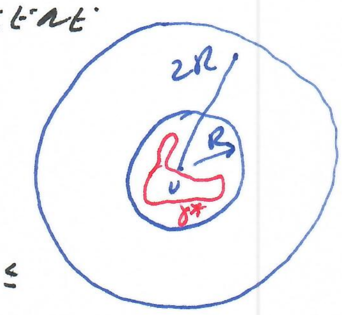
SE SIGUE QUE $\phi(t) = \dfrac{\gamma(t)-z}{\gamma(\alpha)-z}$ Y COMO γ ES UN CAMINO CERRADO $(\gamma(\beta) = \gamma(\alpha))$, $\phi(\beta) = 1$

ASÍ $\phi(\beta) = e^{\int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\, dt} = 1 \Rightarrow \operatorname{Ind}_\gamma(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\, dt \in \mathbb{Z}$

b) ADEMÁS COMO $Ind_\gamma \in H(\Omega)$, EN PARTICULAR ES CONTINUA Y POR TANTO CONSTANTE EN CADA COMPONENTE CONEXA DE Ω.

($f: \Omega \to \mathbb{Z}$ CONTINUA, SI $C \subseteq \Omega$ CONEXO $\Rightarrow f(C)$ ES CONEXO EN $\mathbb{Z}$ $\Rightarrow f(C) \equiv cte$)

c) γ^* ES COMPACTO EN $\mathbb{C}$, ASÍ $\exists R > 0$ CON $\gamma^* \subseteq D(0,R)$ (O LO QUE ES LO MISMO γ^* ESTÁ ACOTADO) LUEGO LA COMPONENTE CONEXA NO ACOTADA DE Ω CONTIENE A $\mathbb{C} \setminus D(0,R)$

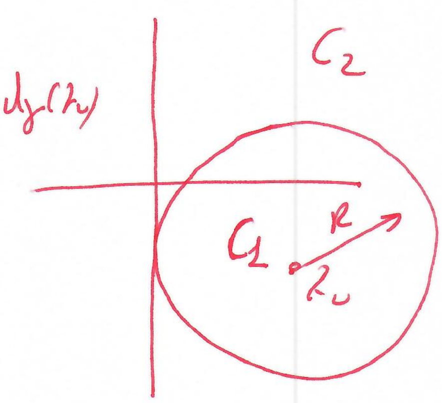


SI $z \in \mathbb{C} \setminus D(0,2R)$

$$|Ind_\gamma(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\, dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \left| \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \frac{|\gamma'(t)|}{R}\, dt \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

EJEMPLO SEA $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$



$\forall z_1 \in C_1 \Rightarrow Ind_\gamma(z_1) = 1 = Ind_\gamma(z_0)$
POR b)

$\forall z_2 \in C_2 \Rightarrow Ind_\gamma(z_2) = 0$
POR b) Y c)

VISION GEOMÉTRICA DE LA FUNCION INDICE

CURVAS DE JORDAN

SEA $\gamma [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ UNA FUNCION CONTINUA.

E INYECTIVA EN $[a,b)$ CON $\gamma(a) = \gamma(b)$.

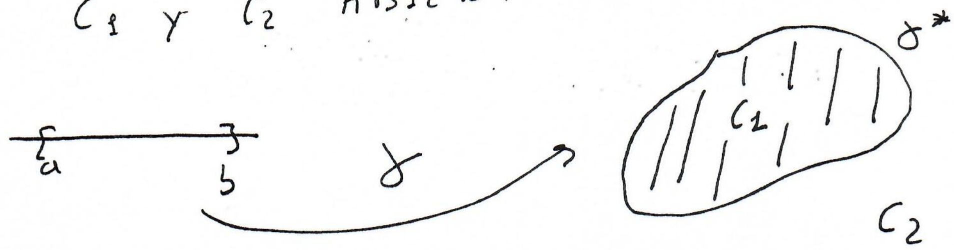
LO QUE SE CONOCE CON EL NOMBRE DE CURVA CERRADA SIMPLE O <u>CURVA DE JORDAN</u>

TEOREMA DE JORDAN:

$\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ ES <u>NO</u> CONEXO Y

$\mathbb{C} \setminus \gamma^* = C_1 \cup C_2$

C_1 Y C_2 ABIERTOS CONEXOS DISJUNTOS.



<u>OBSERVACION</u> POR SER γ^* COMPACTO CLARAMENTE LA COMPONENTE C_2 ES NO ACOTADA

MUNKRES "TOPOLOGIA" (USA EL GRUPO FUNDAMENTAL)

CHRISTEJON AND VOXMAN "ASPECTS OF TOPOLOGY" (USA TOPOLOGIA ELEMENTAL DE $\mathbb{C}$)

HAY UNA PRUEBA MAS SENCILLA DE ESTE TEOREMA SUPONIENDO γ DERIVABLE CON CONTINUIDAD

— . —

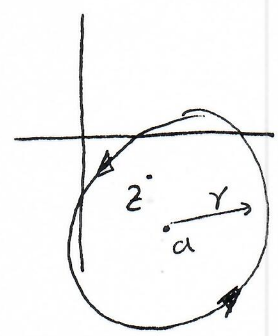
SABEMOS QUE EL ÍNDICE RESPECTO DE UN CAMINO CERRADO γ DE UN PUNTO PERTENECIENTE A LA COMPONENTE CONEXA NO ACOTADA DE $\mathbb{C} - \gamma^*$ [POR TANTO "EXTERIOR" A LA CURVA] ES CERO

VAMOS A TRATAR DE VER QUE EL ÍNDICE DE UN PUNTO "ENCERRADO" POR EL CAMINO γ ES EL NÚMERO DE VUELTAS QUE DA LA CURVA ALREDEDOR DEL PUNTO

EJEMPLOS SI γ ES UNA CIRCUNFERENCIA O UNA UNIÓN DE CIRCUNFERENCIAS, LO ANTERIOR QUEDA CLARO CON LOS EJEMPLOS VISTOS.

SEA $\gamma\ [0, 2n\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \rightarrow a + re^{it}$



γ RECORRE n VECES $\partial D(a, r)$ EN SENTIDO POSITIVO

SEA $z \in D(a, r)$.

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) \underset{\substack{\downarrow \\ z, a \in D(a,r) \\ \text{CONEXO.}}}{=} \operatorname{Ind}_\gamma(a) \doteq$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2n\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\, dt = n$$

— o —

LO PRIMERO QUE VEREMOS ES QUE CUALQUIER OTRA "CURVA SIMILAR" A LA CIRCUNFERENCIA TIENE UNA FUNCIÓN ÍNDICE COMO LA DE LA CIRCUNFERENCIA

LEMA Si γ_0 y γ_1 son caminos cerrados con $[0,1]$ como intervalo del parámetro (con la misma orientación) y si para un $\alpha \in \mathbb{C}$ se verifica que

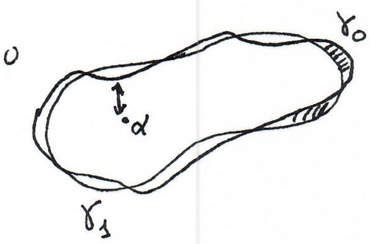
$$|\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)| \quad \forall s \in [0,1]$$

entonces $\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \operatorname{Ind}_{\gamma_2}(\alpha)$.

DEM Por hipótesis $\alpha \notin \gamma_0^* \cup \gamma_1^*$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{Si } \gamma_1(s_0) = \alpha & |\alpha - \gamma_0(s_0)| < |\alpha - \gamma_0(s_0)| \ !! \\ \text{Si } \gamma_0(s_1) = \alpha & 0 \leq |\gamma_1(s_0) - \alpha| < |\alpha - \gamma_0(s_0)| = 0 \ !! \end{array}\right]$$

Sea la curva $\gamma(s) = \dfrac{\gamma_1(s) - \alpha}{\gamma_0(s) - \alpha} \neq 0$



$$\left[\text{Como } \gamma' = \frac{\gamma_1'(\gamma_0 - \alpha) - \gamma_0'(\gamma_1 - \alpha)}{(\gamma_0(s) - \alpha)^2}\right.$$

Ver ejercicio 4 hoja 3ª

$$\left.\frac{\gamma'}{\gamma} = \gamma' \cdot \frac{\gamma_0 - \alpha}{\gamma_1 - \alpha} = \frac{\gamma_1'}{\gamma_1 - \alpha} - \frac{\gamma_0'}{\gamma_0 - \alpha}\right]$$

Así $\dfrac{\gamma'}{\gamma} = \dfrac{\gamma_1'}{\gamma_1 - \alpha} - \dfrac{\gamma_0'}{\gamma_0 - \alpha}$

y por hipótesis y la definición de γ se sigue que

$$|1 - \gamma| = \left|1 - \frac{\gamma_1 - \alpha}{\gamma_0 - \alpha}\right| = \left|\frac{\gamma_0 - \gamma_1}{\gamma_0 - \alpha}\right| < 1.$$

Así $\gamma^* \subset D(1,1)$ y por tanto $\operatorname{Ind}_\gamma(0) = 0$.

$[0 \notin D(1,1)]$

$$\text{Así } 0 = \operatorname{Ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_1'}{\gamma_1 - \alpha}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_0'}{\gamma_0 - \alpha}\,dt =$$

$$= \operatorname{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) - \operatorname{Ind}_{\gamma_0}(\alpha).$$

— o —