TEOREMA DE CAUCHY LOCAL

TEOREMA (DE CAUCHY PARA ABIERTOS CONVEXOS).

SEA $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ UNA FUNCION CONTINUA SOBRE UN ABIERTO CONVEXO Ω. SI $f \in H(\Omega - \{p\})$, $p \in \Omega$, Y γ ES UN CAMINO CERRADO CON $\gamma^* \subseteq \Omega$ SE TIENE

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

OBSERVACIONES

1] UNA PRIMERA VERSION DE ESTE TEOREMA FUE PROBADA POR CAUCHY PARA UNA CAMINO CERRADO SIMPLE Y f TAL QUE f' ES CONTINUA EN Ω.

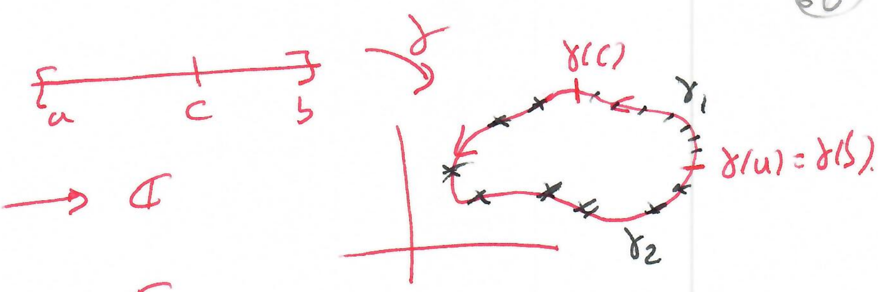
Ejercicio 12 Hoja 3:

2º] GOURSAT (1858-1936) FUE EL PRIMERO EN DEMOSTRAR QUE LA CONDICION f' CONTINUA NO ES NECESARIA

3º] DE HECHO EL TEOREMA DE CAUCHY PERMITE VER QUE SI $f \in H(D(a,r))$ ENTONCES f ES ANALITICA EN $D(a,r)$ Y POR TANTO f' ES CONTINUA Y MAS, INFINITAS VECES DERIVABLE

4º] ESTE SENCILLO TEOREMA TIENE MUCHAS APLICACIONES COMO IREMOS VIENDO.

OBSERVACIÓN



$\gamma \ [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$

$\gamma_1 \ [a,c] \longrightarrow \mathbb{C}$

$\gamma_2 \ [c,b] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^c f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt + \int_c^b \cdots dt =$$

$$= \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

EN GENERAL SI $\Gamma = \{\gamma_1 \ \gamma_2 \ldots \gamma_n\}$ UN CICLO

DEF SEA $\Gamma = \{\gamma_1 \ \gamma_2 - \ \gamma_n\}$ UN CICLO Y

$f \ \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ CONTINUA CON $\Gamma^* \subseteq \Omega$.

SE DEFINE

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz$$

EJEMPLO

γ^*

$\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$

$y \quad \int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$

[1] DEMOSTRACION DE CAUCHY DE "SU TEOREMA"

Ejercicio 12 Hoja 3

NECESITA ESTOS DOS RESULTADOS CLASICOS.

TEOREMA DE GREEN (PARA REGIONES PLANAS ENCERRADAS POR CAMINOS CERRADOS SIMPLES).

SEAN $P, Q : S \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

S ABIERTO Y $P, Q \in C_1(S)$.

SEA C UN CAMINO CERRADO SIMPLE, ORIENTADO POSITIVAMENTE Y CON R, LA REGION QUE ENCIERRA, $R \cup C \subseteq S$.

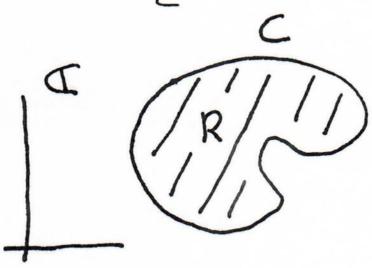
ENTONCES

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN.

TODO CAMINO CERRADO SIMPLE DEL PLANO DESCOMPONE EL PLANO EN DOS REGIONES ABIERTAS, CONEXAS Y DISJUNTAS. UNA REGION NO ACOTADA, ACOTADA LA OTRA.

(PRUEBA DE 1905 POR OSWALD VEBLEN.)



SEA $f : S \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ Y $f \in \mathcal{H}(S)$, CON f' CONTINUA EN S; ASI $Re f, Im f \in C_1(S)$.

$$\int_C f(z) dz \overset{DEF}{=} \int_a^b f \circ c(t) \cdot c'(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b Re f \circ c(t) \cdot c_1'(t) - Im f \circ c(t) \cdot c_2'(t)\, dt +$$

$$i \int_a^b Re f \circ c(t) \cdot c_2'(t) + Im f \circ c(t) \cdot c_1'(t)\, dt \underset{\substack{\downarrow \\ \text{DEFINICION DE} \\ \text{INTEGRAL DE LINEA.}}}{=}$$

$$\oint_C Re f\, dx + (-Im f)\, dy + i \oint_C Im f\, dx + Re f\, dy \underset{\substack{\downarrow \\ \text{TEOREMA} \\ \text{DE GREEN}}}{=}$$

$$= \iint_R \underbrace{- \frac{\partial\, Im f}{\partial x} - \frac{\partial Re f}{\partial y}}_{\overset{\shortparallel}{0}} dx dy + i \iint_R \underbrace{\frac{\partial Re f}{\partial x} - \frac{\partial Im f}{\partial y}}_{\overset{\shortparallel}{0}} dx dy = 0$$

IGUALDADES DE CAUCHY RIEMANN.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE CAUCHY.

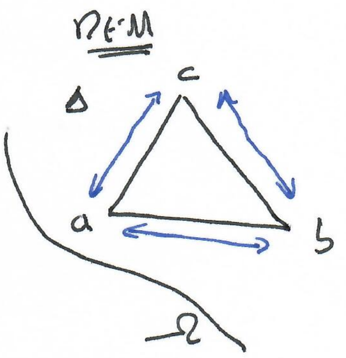
PRIMERO HAY QUE HACER LA PRUEBA EN UN CASO PARTICULAR

TEOREMA DE CAUCHY (PARA TRIÁNGULOS)

SEA Δ UN TRIÁNGULO CERRADO DENTRO DE UNA REGIÓN Ω (ES ABIERTO CONEXO) DEL PLANO Y SUPONGAMOS QUE f ES CONTINUA EN Ω Y $f \in H(\Omega - \{p\})$, PARA CIERTO $p \in \Omega$. ENTONCES

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$

DEM

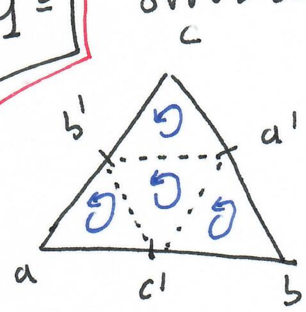


$\Delta \subseteq \Omega$ Y $\partial\Delta = [a,b] \cup [b,c] \cup [c,a]$. NO IMPORTA LA ORIENTACIÓN DE $\partial\Delta$ EN LA INTEGRAL YA QUE VEREMOS QUE LA INTEGRAL ES NULA, PERO LO ORIENTAREMOS POSITIVAMENTE

$\partial\Delta : \overset{\frown}{abc}$

VAMOS A HACER UNA SERIE DE REDUCCIONES, HASTA PROBAR EL TEOREMA EN SU TOTALIDAD.

1º) SUPONGAMOS QUE $p \notin \Delta$



SEAN a', b', c' LOS PUNTOS MEDIOS DE LOS LADOS DEL TRIÁNGULO Δ. SE CONSIDERAN LOS TRIÁNGULOS Δ^j: $\{a\, c'\, b'\}$, $\{c', b, a'\}$, $\{a'\, c\, b'\}$ Y $\{b', c', a'\}$ (OBSERVAMOS QUE LOS LADOS DEL TRIÁNGULO $\{b', c', a'\}$ SE RECORREN EN SENTIDO CONTRARIO A COMO SE HACE EN LOS OTROS TRIÁNGULOS).

ASÍ SE TIENE QUE $J = \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,a]} f =$

$$= \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta^j} f(z)\,dz$$

El valor absoluto de al menos una de las integrales anteriores será mayor o igual que $\frac{|J|}{4}$: llamaremos al triángulo con tal propiedad Δ_1. Sobre este triángulo repetimos el mismo proceso. Así encontramos una sucesión de triángulos $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$ con:

$$\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots$$

de modo que la longitud de $\partial\Delta_n$ es

$$\mathrm{long}\,\partial\Delta_n = \frac{L}{2^n}$$

donde $L = \mathrm{long}\,\Delta$.

(tomamos los puntos medios para dividir los triángulos).

y de forma que

$$|J| \le 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \right| \quad n=1,2,\dots$$

Cada Δ_n es un compacto cuyo diámetro tiende a cero por tanto existe un único z_0 tal que

$$z_0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n$$

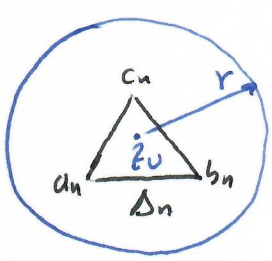
Como Δ es compacto y $z_0 \in \Delta$, f es derivable en z_0 $f \in H(\Omega - P)$

(estamos suponiendo que $P \notin \Delta$ y que

por lo tanto para todo $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \le \varepsilon |z - z_0| \quad (A)$$

$\forall z \in D(z_0, r)$.

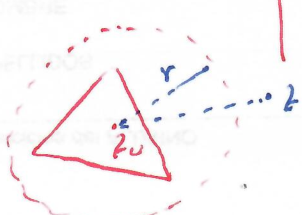


Para n suficientemente grande, $\Delta_n \subseteq D(z_0, r)$ para todo n suficientemente grande (así $|z - z_0| < r$ $\forall z \in \Delta_n$)

Como $2^{-n} L \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, resulta que $2^{-n_0-1} L < \boxed{r \le 2^{-n_0} L}$ para algún n_0; además $\Delta_{n_0} \subseteq D(z_0, r)$.

Podemos tomar r como arriba o más pequeño, como $2^{-n} L \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ tomamos otro $r = 2^{-n_0} L$.

En este caso



Si $\exists z \in \Delta_{n_0}$ con $|z - z_0| > r$ necesariamente el perímetro de Δ_{n_0} será mayor que r y no es el caso

AHORA $\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_{n_0}} f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)\,dz$

POR LA REGLA DE BARROW

$\int_{\partial\Delta_0} f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)\,dz = 0$

ASÍ $|J| \le 4^{n_0}\left|\int_{\partial\Delta_{n_0}} f(z)\,dz\right| \le 4^{n_0}\int_{\partial\Delta_{n_0}} \varepsilon\,|z-z_0|\,dz$

(*) HOJA ANTERIOR

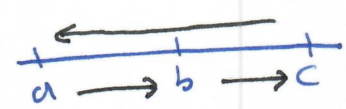
$\le 4^{n_0}\,\varepsilon\, r\int_{\partial\Delta_{n_0}} dz \le 4^{n_0}\,\varepsilon\, 2^{-n_0} l\; 2^{-n_0} l = \varepsilon l^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

$\partial\Delta_{n_0} \subseteq D(z_0, r)$

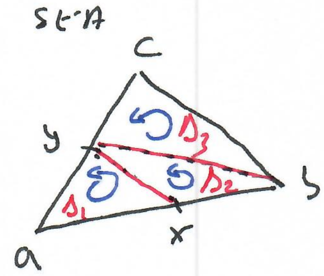
LO QUE PRUEBA QUE $J = \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$

2º SUPONGAMOS QUE $p \in \Delta$ Y QUE p ES UN VÉRTICE DE Δ, POR EJEMPLO $p = a$

SI a, b y c ESTÁN EN LA MISMA RECTA EL RESULTADO ES TRIVIAL INDEPENDIENTEMENTE DE f



SI a, b y c NO SON COLINEALES SEA $x \in [a,b]$ e $y \in [a,c]$ AMBOS PRÓXIMOS A "a". OBSERVEMOS QUE LA INTEGRAL DE f SOBRE $\partial\Delta$ ES LA SUMA DE LAS INTEGRALES SOBRE LAS FRONTERAS DE LOS TRIÁNGULOS



$\Delta_1 = [a, x, y]$, $\Delta_2 = [x, b, y]$, $\Delta_3 = [y, b, c]$, RESPETANDO LAS ORIENTACIONES POSITIVAS, ASÍ

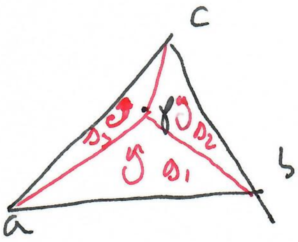
COMO $\int_{\partial\Delta_2} f = \int_{\partial\Delta_3} f = 0$ POR 1º

$\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta_1} f + \int_{\partial\Delta_2} f + \int_{\partial\Delta_3} f = \int_{\partial\Delta_1} f = \int_{[a,x]} f + \int_{[x,y]} f + \int_{[y,a]} f$

COMO $[a,x]$, $[x,y]$ Y $[y,a]$ SE PUEDEN TOMAR TODO LO PEQUEÑOS QUE QUERAMOS Y POR ESTAR f ACOTADA EN Δ

$\int_{\partial\Delta_1} f \xrightarrow[x,y\to a]{} 0$ ASÍ $\int_{\partial\Delta} f = 0$ || $\left|\int_{[a,x]} f(z)\,dz\right| \le \|f\|_\infty \,\mathrm{long}[a,x] \xrightarrow[x\to a]{} 0$

3:) FINALMENTE SI $p \in \Delta$, SE APLICA EL ARGUMENTO DE 2:) A LA PARTICIÓN DE Δ



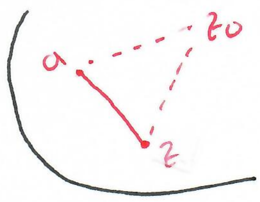
$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta_1} f + \int_{\partial\Delta_2} f + \int_{\partial\Delta_3} f = 0$$

TEOREMA DE CAUCHY LOCAL (O PARA CONVEXOS)

Ejercicio: SEA $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ UNA FUNCIÓN CONTINUA SOBRE EL ABIERTO CONVEXO Ω. SI $f \in H(\Omega - \{p\})$, $p \in \Omega$, Y γ ES UN CAMINO CERRADO CON $\gamma^* \subseteq \Omega$, SE TIENE QUE $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

INDICACIÓN (*)

DEM



SI Ω ES CONVEXO Y a Y $z \in \Omega$ ENTONCES $[a,z] \subseteq \Omega$.

SEA $a \in \Omega$ Y SEA $F(z) \overset{(*)}{=} \int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta \quad \forall z \in \Omega$

F ESTÁ BIEN DEFINIDA POR SER Ω CONVEXO

ASÍ $F'(z) \overset{(*)}{=} f(z) \quad \forall z \in \Omega$

(*) DEM $F(z) - F(z_0) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{[a,z_0]} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{[z_0,z]} f(z)\,dz$

TEOREMA DE CAUCHY PARA TRIÁNGULOS

VER EJERCICIO 5: HOJA 3.

ASÍ $\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z-z_0} \int_{[z_0,z]} [f(\zeta) - f(z_0)]\,d\zeta$

$\int_{[z_0,z]} f(z_0) = f(z_0)[z-z_0]$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ TAL QUE SI $|\zeta - z_0| < \delta \Rightarrow |f(\zeta) - f(z_0)| < \varepsilon$

POR CONTINUIDAD

ASÍ $\left| \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0) \right| \leq \frac{1}{|z-z_0|} \varepsilon |z-z_0| = \varepsilon$ //

SI $F'(z) = f(z)$ f TIENE UNA PRIMITIVA Y POR TANTO $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ PARA TODO CAMINO CERRADO γ EN Ω.

AQUÍ TEOREMA DE MORERA

EJEMPLO $\int_{\partial 0 1 i} \bar{z}\,dz \neq 0$

$f(z) = \bar{z}$ continua en todo $\mathbb{C}$, pero $f \notin H(\mathbb{C})$ y sobre [triángulo $0, 1, i$] no verifica el teorema de Cauchy

¿PRACTICA 5? (T10)

EJEMPLO

SEA $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}} dx.$

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD NORMAL DE MEDIA θ Y VARIANZA σ^2. LA FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DE F ESTA DADA POR

$$\varphi_F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}} e^{itx} dx =$$

(TRANSFORMADA DE FOURIER DE $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}$).

$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sigma\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e^{it(\sqrt{2}\sigma y+\theta)} dy =$$

CAMBIO DE VARIABLE

$y = \frac{x-\theta}{\sqrt{2}\sigma}$

$dx = \sqrt{2}\sigma dy$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\cos(t\sqrt{2}\sigma y + t\theta)dy + i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\operatorname{sen}(t\sqrt{2}y\sigma + t\theta)dy\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\cos(t\sqrt{2}\sigma y)\cos t\theta\, dy - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\operatorname{sen}(t\sqrt{2}\sigma y)\operatorname{sen} t\theta\, dy}_{=0}\right]$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\cos(t\sqrt{2}\sigma y)\operatorname{sen} t\theta\, dy + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\operatorname{sen}(t\sqrt{2}\sigma y)\cdot\cos t\theta\, dy}_{=0}\right] =$$

ESTAS INTEGRALES SE CALCULAN CON TÉCNICAS DE VARIABLE COMPLEJA (VER HOJAS SIGUIENTES).

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{t^2 2\sigma^2}{4}}\cos t\theta + i\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{t^2 2\sigma^2}{4}}\operatorname{sen} t\theta\right] =$$

$$= e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}(\cos t\theta + i\operatorname{sen} t\theta) = e^{\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2} + it\theta\right)}.$$

EJEMPLO

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{sen} 2bx\,dx = 0.$$

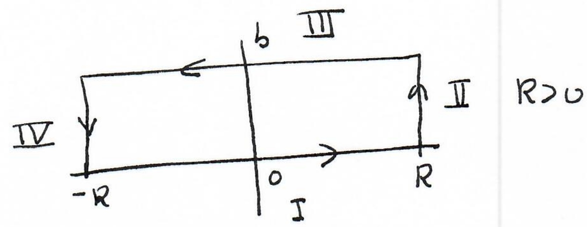
PARA VER ESTAS IGUALDADES TENDREMOS EN CUENTA: a) EL TEOREMA DE CAUCHY

b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$

DEM SEA $f(z) = e^{-z^2}$

Y SEA EL CAMINO CERRADO γ_R

$$\gamma_R^* = I^* \cup II^* \cup III^* \cup IV^*$$



ASI POR EL TEOREMA DE CAUCHY

$$0 = \int_{\gamma_R} e^{-z^2}dz = \int_I e^{-z^2}dz + \int_{II} e^{-z^2}dz + \int_{III} e^{-z^2}dz + \int_{IV} e^{-z^2}dz$$

CONSIDERANDO

I $[-R,R] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longrightarrow (t,0)$

II $[0,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longrightarrow (R,t)$.

III $[-R,R] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longrightarrow -t+bi$

IV $[0,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longrightarrow -R+(b-t)i$

ASÍ

$$0 = \int_\gamma e^{-z^2}dz = \int_{-R}^{R} e^{-t^2}dt + \int_0^b i e^{-(R+ti)^2}dt + \int_{-R}^{R} -e^{-(-t+bi)^2}dt + \int_0^b -i e^{-(-R+(b-t)i)^2}dt =$$

$$= \int_{-R}^{R} e^{-t^2}\left[1 - e^{2tbi+b^2}\right]dt + i\int_0^b e^{-R^2}\left[e^{-2tRi+t^2} - e^{2R(b-t)i+(b-t)^2}\right]dt.$$

LO ANTERIOR ES INDEPENDIENTE DEL VALOR CONCRETO DE R; ASI SI $R \to \infty$

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left[1 - e^{b^2}\left[\cos 2xb - i\,\text{sen}\,2xb\right]\right]dx$$

YA QUE

$$\left| i\int_0^b e^{-R^2}\left[e^{-2tRi+t^2} - e^{2R(b-t)i+(b-t)^2}\right]dt\right| \leq$$

$$\leq e^{-R^2}\int_0^b \left| e^{-2tRi+t^2}\left[1 - e^{2Rbi+b^2-2tb}\right]\right| dt \leq$$

$$\leq e^{-R^2}\int_0^b e^{t^2}\left|1 - e^{b^2-2tb}e^{2Rbi}\right| dt \leq$$

$$\leq e^{-R^2}\int_0^b e^{t^2}(1 + e^{b^2-2tb})dt \leq$$

$$\leq e^{-R^2}\cdot b\cdot \sup\{(1+e^{b^2-2tb})e^{t^2} : t\in[0,b]\} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

ASI

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} = e^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left[\cos 2xb - i\,\text{sen}\,2xb\right]dx$$

ES DECIR.

$$\sqrt{\pi}\cdot b^{-b^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2xb\,dx - i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\text{sen}\,2xb\,dx$$

ASI $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\text{sen}\,2xb\,dx = 0}$

AHORA COMO $e^{-x^2}\cos 2xb$ ES UNA FUNCION PAR

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2xb\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}}$$