APLICACIONES DE LA TEORÍA DE CAUCHY

COMO APLICACIONES DEL TEOREMA DE CAUCHY VEREMOS LOS SIGUIENTES RESULTADOS:

√ – FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY.

√ – TEOREMA DE ANALITICIDAD DE FUNCIONES HOLOMORFAS

√ – TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

√ – TEOREMAS DE IDENTIDAD PARA FUNCIONES HOLOMORFAS

√ – TEOREMA DE MORERA

√ – DESIGUALDADES DE CAUCHY

√ – TEOREMA DE LIOUVILLE

√ – TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

– TEOREMA DEL MÓDULO MÁXIMO

FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

EL TEOREMA DE CAUCHY PERMITE DAR UNA REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS.

TEOREMA (FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY).

SI $f \in H(\Omega)$ CON Ω ABIERTO Y SEA $a \in \Omega$.

Y $r > 0$ CON $D(a,r) \subset \Omega$.

ENTONCES $\forall z \in D(a,r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

SE ENTIENDE ORIENTADA POSITIVAMENTE.

OBSERVACIÓN: f EN $D(a,r)$ QUEDA DEFINIDA CONOCIENDO $f|_{\partial D(a,r)}$

DEM

SEA $z \in D(a,r)$; $z \notin \partial D(a,r)$

SEA
$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{SI } \zeta \in \Omega \setminus \{z\} \\ f'(z) & \text{SI } \zeta = z. \end{cases}$$

g ES UNA FUNCIÓN CONTINUA Ω

(YA QUE $\lim_{\zeta \to z} g(\zeta) = f'(z) = g(z)$).

Y HOLOMORFA EN $\Omega - \{z\}$

(g ES DIVISIÓN DE FUNCIONES HOLOMORFAS)

AHORA POR EL TEOREMA DE CAUCHY

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} g(\zeta)\, d\zeta = 0$$

LUEGO

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

ASÍ

$$f(z) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta \right)}_{= 1 \ (*)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

(*) LO VIMOS ANTES CUANDO ESTUDIAMOS LA FUNCIÓN ÍNDICE.

FUNCIONES HOLOMORFA Y ANALÍTICAS

SABEMOS QUE LAS FUNCIONES ANALÍTICAS SON HOLOMORFAS (DERIVABLES). MÁS SON INFINITAMENTE DERIVABLES. VEAMOS EL RECÍPROCO.

TEOREMA (DE ANALITICIDAD DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS)

SEA $f \in H(\Omega)$ CON Ω ABIERTO, ENTONCES f ES ANALÍTICA.

DEM: SEA $a \in \Omega$ Y SEA $R > 0$ CON $D(a,R) \subseteq \Omega$

Sea $r < R$ Y SE $\partial D(a,r)$ ORIENTADA POSITIVAMENTE

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = \quad \forall z \in D(a,r)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it}) \cdot ire^{it}}{a+re^{it} - z} \, dt.$$

SI $\psi(t) = f\circ\gamma(t) \cdot \gamma'(t) \quad t \in [0,2\pi]$.

$\varphi(t) = a + re^{it} \quad t \in [0,2\pi] \quad \varphi([0,2\pi]) \cap D(a,r) = \emptyset$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(t)}{\varphi(t) - z} \, dt \quad \forall z \in D(a,r).$$

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN ÍNDICE: 55

POR EL LEMA ANTERIOR SE TIENE QUE

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(t)}{\varphi(t) - z} \, dt = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\psi(t)}{(\varphi(t) - a)^{n+1}} \, dt \right) (z-a)^n$$

$$\forall z \in D(a,r)$$

ASÍ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \quad \forall z \in D(a,r)$ DONDE

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \, d\xi$$

OBSERVACIÓN LO ANTERIOR ES CIERTO $\forall r < R$, ASÍ EL RADIO DE CONVERGENCIA DE LA SERIE ANTERIOR ES AL MENOS R.

CONSECUENCIAS

COROLARIO: SI $f \in H(\Omega)$, Ω ABIERTO, ENTONCES $f' \in H(\Omega)$.

AHORAS LOS TEOREMAS DE IDENTIDAD SE PUEDEN APLICAR A FUNCIONES HOLOMORFAS.

COROLARIO: SEAN $f, g\ \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f, g \in H(\Omega)$ CON Ω ABIERTO CONEXO

a) SI EXISTE $\Omega_1 \subset \Omega$ ABIERTO CON $f_{|\Omega_1} = g_{|\Omega_1} \Rightarrow f = g$ EN TODO Ω.

b) SI EXISTE $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \Omega$ UNA SUCESION DE TERMINOS DISTINTOS Y CONVERGENTE EN Ω, DE TERMINOS DENTRO DE Ω TALES QUE $f(z_n) = g(z_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ENTONCES $f = g$ EN TODO Ω.

(TEOREMAS DE IDENTIDAD)

DEM: $f, g \in H(\Omega) \Rightarrow f$ y g ANALÍTICAS EN Ω. AHORA SE APLICAN LOS CRITERIOS DE IDENTIDAD PARA FUNCIONES ANALÍTICAS.

EJEMPLOS

- $e^{-\frac{1}{z^2}}$ NO ES ANALÍTICA EN $z=0$. SI LO FUESE COMO COINCIDE CON e^{-1/x^2} $\forall x \in \mathbb{R}$, SE TENDRIA QUE $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Y ASI $f \equiv 0$. Y NO LO ES.

- EJEMPLO. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

SEA $g(z) = e^{z_1+z}$ Y $f(z) = e^{z_1}e^{z}$, $g, f \in H(\mathbb{C})$.

AHORA SI $z \in \mathbb{R}$.

$$g(z) = e^{\mathrm{Re}\, z_1 + z} e^{\mathrm{Im}\, z_1 i} = e^{\mathrm{Re} z_1} \cdot e^{z} e^{\mathrm{Im}\, z_1 i} = e^{z_1} \cdot e^{z} = f(z).$$

LUEGO POR EL TEOREMA DE IDENTIDAD $f(z) = g(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

EL TEOREMA DE CAUCHY SERA ESENCIAL EN LOS DISTINTOS TEMAS QUE VAMOS A ESTUDIAR A CONTINUACION

TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA: SI $f \in H(\Omega) \Rightarrow f' \in H(\Omega)$ Y POR TANTO ES CONTINUA, LUEGO AQUI YA PODRÍAMOS VER EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA (VISTO Y PROBADO POR ADELANTADO)

APLICACIONES DEL TEOREMA DE CAUCHY LOCAL

VAMOS A PRESENTAR UNA CUANTAS APLICACIONES DE ESTE TEOREMA. DE HECHO BUENA PARTE DEL ANÁLISIS COMPLEJO DESCANSA SOBRE EL TEOREMA Y LA FÓRMULA DE CAUCHY, JUNTO CON LOS TEOREMAS DE IDENTIDAD.

TEOREMA DE LA FUNCION INVERSA

(lo veremos más adelante, con otras técnicas)

SEA $g : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, Ω ABIERTO Y $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ CON $g'(w_0) \neq 0$ CON $w_0 \in \Omega$. ENTONCES

a) EXISTEN V Y W ENTORNOS DE w_0 Y $g(w_0)$ TAL QUE $g \; V \longrightarrow W$ ES BIYECTIVA.

b) $g^{-1} \in \mathcal{H}(W)$ Y $(g^{-1})'(z) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(z))}$ $\forall z \in W$.

DEM SI $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ g ES DIFERENCIABLE EN Ω Y ADEMAS g' ES CONTINUA (g ES ANALÍTICA), LUEGO $g \in C^1(\Omega)$. (g ES DIFERENCIABLE CON CONTINUIDAD). ADEMAS COMO

$$Dg(w) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial x}(w) & -\dfrac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial x}(w) \\ \dfrac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial x}(w) & \dfrac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial x}(w) \end{pmatrix}$$

$$|Dg(w)| = \left(\frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial x}(w)\right)^2 + \left(\frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial x}(w)\right)^2 \neq 0$$ YA QUE

$$g'(w) = \left(\frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial x}(w), \frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial x}(w)\right) \neq 0.$$

AHORA POR EL TEOREMA DE LA FUNCION INVERSA $\exists V$ Y W ENTORNOS DE W_0 Y $g(w_0)$. CON

$$g \; V \longrightarrow W \quad \text{BIYECTIVA Y}$$

$g^{-1} \in C_1(W)$, COMO ADEMAS $Dg^{-1} = (Dg(g^{-1}))^{-1}$

g^{-1} VERIFICA LAS CONDICIONES DE CAUCHY-RIEMANN (POR DEFINICION DE MATRIZ INVERSA) Y ASI $g^{-1} \in \mathcal{H}(W)$.

Ahora como $g^{-1} \circ g(z) = z$ POR LA REGLA DE LA CADENA

$$(g^{-1})'(z) = \frac{1}{g'(g^{-1}(z))}$$ c.q.d.

TEOREMA DE MORERA

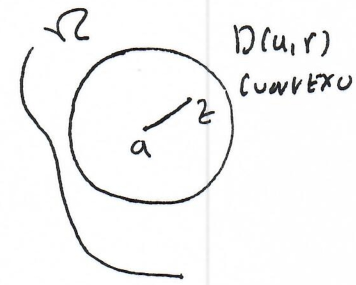
SEA $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ CON Ω ABIERTO Y f CONTINUA EN Ω. SI PARA TODO TRIÁNGULO CERRADO $\Delta \subseteq \Omega$

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0 \qquad (*)$$

ENTONCES $f \in H(\Omega)$.

OBSERVACION: ESTAMOS ANTE "EL RECÍPROCO" DEL TEOREMA DE CAUCHY PARA TRIÁNGULO.

DEM SEA $a \in \Omega$ Y SEA $r > 0$ CON $D(a,r) \subseteq \Omega$.



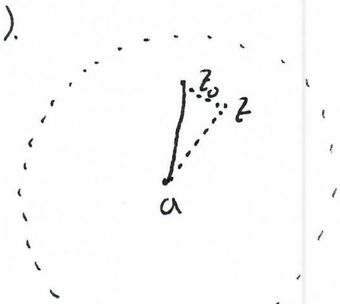
SE DEFINE $F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta$

$\forall z \in D(a,r)$.

F ESTA BIEN DEFINIDA POR SER f CONTINUA.

SI VEMOS QUE $F' = f$ POR SER F' ANALÍTICA $f \in H(D(a,r))$.

DEMOSTREMOS QUE



SEA $z_0 \in D(a,r)$, Y $z \in D(a,r)$

$$\int_{\partial \triangle a z_0 z} f(z)\,dz = 0$$

LA PRUEBA ES LA MISMA QUE LA PARTE FINAL DEL TEOREMA DE CAUCHY SUSTITUYENDO EL TEOREMA DE CAUCHY PARA TRIÁNGULO POR LA HIPÓTESIS (*)

ASI
$$\frac{1}{z-z_0}(F(z)-F(z_0)) = \frac{1}{z-z_0}\left[\int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{[a,z_0]} f(\zeta)\,d\zeta\right] =$$

$$= \left(-\int_{[z,z_0]} f(\zeta)\,d\zeta\right)\frac{1}{z-z_0} =$$

$$= \left(-\int_0^1 f((1-t)z + tz_0)(z_0 - z)\,dt\right)\frac{1}{z-z_0} =$$

$$= \int_0^1 f((1-t)z - tz_0)\,dt.$$

AHORA $F'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \int_0^1 f((1-t)z - tz_0)\,dt \underset{f \text{ CONTINUA}}{=} f(z_0)$

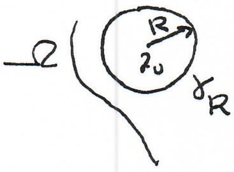
[SEA $z_n \to z_0$ SEA $f_n(t) = f((1-t)z_n) - tz_0) \longrightarrow f(z_0)$ UNIFORMEMENTE EN $[0,1]$.

TEOREMA (DESIGUALDADES DE CAUCHY).

SEA Ω UN ABIERTO DEL PLANO Y SEA $f \in H(\Omega)$. SEA $z_0 \in \Omega$ Y $R > 0$ TAL QUE $D(z_0, R) \subset \Omega$. SE VERIFICA QUE

$$|f^{n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \{ |f(z_0 + Re^{i\theta})| \} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

DEM f ES ANALÍTICA EN $D(z_0, R)$ Y



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \quad \text{DONDE}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{TEOREMA DE TAYLOR}}}{b_n =} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{TEOREMA DE ANALITICIDAD}}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz$$

ASÍ $$|f^{n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz \right| \leq$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\gamma_R'(t)| \, dt \cdot \sup_{z \in \gamma_R} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} =$$

$$= \frac{n!}{2\pi} R \cdot 2\pi \sup_{z \in \gamma_R} |f(z)| \cdot \frac{1}{R^{n+1}} =$$

$$= \frac{n!}{R^n} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \{ |f(z_0 + Re^{i\theta})| \}.$$

COROLARIO SI $f \in H(D(z_0, R))$ CON $|f(z)| \leq M \ \forall z \in D(z_0, R)$ ENTONCES $|f^{n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} M \ \forall n \in \mathbb{N}$.

TEOREMA (DE LIOUVILLE). SI $f \in H(\mathbb{C})$, FUNCIÓN ENTERA, Y f EN MÓDULO ESTÁ ACOTADA. ENTONCES f ES CONSTANTE.

DEM: Si $f \in H(\mathbb{C})$, por ser f analítica se sigue que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$

($f \in H(\mathbb{C})$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} z^n$ al menos en un abierto centrado en 0 luego se da la igualdad sobre todo $z \in \mathbb{C}$).

Si $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$, de las desigualdades de Cauchy se sigue que $|f^{n)}(0)| \leq \frac{n!}{R^n} M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ lo cual es cierto $\forall R > 0$, así $\frac{n!}{R^n} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$

Luego $|f^{n)}(0)| = 0 \quad \forall n \geq 1$

Así $f(z) \equiv f(0) \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

APLICACIÓN (Teorema fundamental del álgebra)

Sea $P(z) = a_0 + a_1 z + \quad + a_n z^n$ una función polinómica (con $a_n \neq 0$ con $n \geq 1$). Existe algún $z_0 \in \mathbb{C}$ con $P(z_0) = 0$

DEM: $P \in H(\mathbb{C})$. y $\lim_{z \to \infty} \frac{P(z)}{z^n} = a_n$.

Así existe $r > 0$ tal que $\left| \frac{P(z)}{z^n} \right| > \frac{1}{2} |a_n| > 0$ si $|z| > r$

Si suponemos que $P(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, entonces

$f(z) = \frac{1}{P(z)} \in H(\mathbb{C})$ y $\begin{cases} a) \ \frac{1}{P} \Big|_{\overline{D(0,r)}} & \text{está acotada por ser continua sobre un compacto} \\ b) \ \left| \frac{1}{P(z)} \right| \leq \frac{2}{r^n |a_n|} & \text{si } |z| > r. \end{cases}$

Así f está acotada en todo $\mathbb{C}$; luego $\frac{1}{P(z)} \equiv cte \neq 0$ así $P(z) = a_0$ contradicción

---

OBSERVACIÓN: ESTAMOS EN CONDICIONES DE PROBAR EL TEOREMA DEL MÓDULO MÁXIMO Y DEDUCIR LOS TEOREMAS DE LA APLICACIÓN ABIERTA Y EL LEMA DE SCHWARZ. LO VEREMOS MÁS ADELANTE

1] TEOREMA DEL MÓDULO MÁXIMO:

SEA Ω UN ABIERTO CONEXO DEL PLANO Y SEA $f \in H(\Omega)$. SI EXISTE $z_0 \in \Omega$ Y UN DISCO $D(z_0,r) \subseteq \Omega$ TALES QUE

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in D(z_0,r).$$

ENTONCES f ES CONSTANTE EN Ω.

2] TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA.

SEA $f \in H(\Omega)$ CON Ω ABIERTO. SI f NO ES CONSTANTE, ENTONCES $f(\Omega)$ ES ABIERTO

3] LEMA DE SCHWARZ

SEA $f: D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \in H(D(0,1))$ CON $f(0)=0$ Y ADEMÁS $|f(z)| \leq 1 \quad \forall z \in D(0,1)$.

ENTONCES.

a) $|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in D(0,1)$. (ASÍ $f(D(0,1)) \subseteq D(0,1)$).

b) $|f'(0)| \leq 1$

ADEMÁS SI ALGÚN $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$ VERIFICA $|f(z_0)| = |z_0|$ O BIEN $|f'(0)| = 1$ ENTONCES f ES UN GIRO

(E.D. $\exists \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1$ Y $f(z) = \lambda z \quad \forall z \in D(0,1)$).

DEMOSTRACIONES

1:) (TEOREMA DEL MÓDULO MÁXIMO).

SEA $M = |f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in D(z_0, r)$.

SEA $0 < s < r$ Y SEA

$$\Phi \; [0, s] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t, \theta) \longrightarrow \Phi(t,\theta) = |f(z_0 + te^{i\theta})| - M.$$

VAMOS A VER QUE $\Phi \equiv 0$ Y ASÍ $|f(z)| = M \quad \forall z \in D(z_0, s)$

Φ ES CONTINUA Y $\Phi \leq 0$.

AHORA SI $t \in [0, s]$ Y $\gamma_t(\theta) = z_0 + te^{i\theta}$

LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY ASEGURA QUE

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

ASÍ

$$0 \leq M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + te^{i\theta})|\,|ite^{i\theta}|}{|te^{i\theta}|}\, dt$$

POR TANTO $0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + te^{i\theta})|\, d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\, d\theta =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(t, \theta)\, d\theta$$

ESTO ES CIERTO $\forall t \in [0, s]$. ASÍ POR SER Φ CONTINUA Y $\Phi \leq 0$, SE DEDUCE QUE $\Phi \equiv 0$.

ASÍ $f \in \mathcal{H}(D(z_0, s))$ Y $|f| \equiv cte$ EN $D(z_0, s)$.

Ejercicio 18 Hoja 1ª

LUEGO $f \equiv cte$ EN $D(z_0, r)$. Y POR LOS TEOREMAS DE IDENTIDAD $f \equiv cte$ EN Ω.

DEM $f = u + vi \qquad |f| \equiv cte \Rightarrow u^2 + v^2 = cte$ ASÍ

$$\left.\begin{array}{l} 2uu_x + 2vv_x = 0 \\ 2uu_y + 2vv_y = \\ = 2vu_x - 2uv_x = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 2v & -2u \end{vmatrix} = -4(u^2 + v^2)$$

CAUCHY - RIEMANN

SI $|f| \equiv 0$ EL RESULTADO ES TRIVIAL, SINO

$u_x = v_x = u_y = v_y = 0$ LUEGO $u \equiv cte$ Y $v \equiv cte$