ESTUDIO DE SINGULARIDADES

(Teorema de los residuos para conjuntos convexos y finitos singularidades)

Def Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y sea $p \in \Omega$. (Así $\Omega - \{p\}$ es un abierto). Si $f \in H(\Omega - \{p\})$, decimos que p es una singularidad aislada de f.

no es por tanto un conjunto convexo.

Ejemplo $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^n}$ $\quad f \in H(\mathbb{C} - \{a\})$ $\quad p = a$ es una singularidad aislada.

Observación 1) $\lim_{z \to a} \dfrac{1}{(z-a)^n} = \infty$

2) $\dfrac{1}{f(z)} = g(z) \in H(\mathbb{C} - \{a\})$ y $g(a) = 0$

Def Sea $A \subseteq \Omega$, Ω abierto. Decimos que A es discreto en Ω si A no tiene puntos de acumulación en Ω.

Ejemplos
- Si A es finito, $A \subseteq \mathbb{C}$ es discreto
- $A = \{n + ni\} \subseteq \mathbb{C}$ es discreto en $\mathbb{C}$
- $A = \{(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} i\} \subseteq (0,1) \times (0,1)$ es discreto en el cuadrado abierto $(0,1) \times (0,1)$

Vamos a estudiar funciones $f \in H(\Omega - A)$ con Ω abierto, A discreto en Ω y de modo que cada $p \in A$ sea de un tipo especial respecto de f (que sea un polo).

Empezaremos con funciones del tipo del ejemplo anterior $\left(f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^n}\right)$ y veremos como este tipo de funciones nos da un patrón general.

ESTUDIO DE SINGULARIDADES

LAS FUNCIONES $f(z) = (z-a)^n$ SON ENTERAS

SIN EMBARGO $\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-a)^n}$ TIENE UNA DISCONTINUIDAD EN $z = a$. SI $n \neq 1$

$$\int_{\partial D(a,r)} \frac{1}{(z-a)^n}\, dz = 0 \quad \left[\text{YA QUE TIENE UNA PRIMITIVA} \right]$$

LA TEORIA INTEGRAL DE CAUCHY PERMITE ESTUDIAR LAS SINGULARIDADES DE FUNCIONES HOLOMORFAS SALVO QUIZAS EN UNA "CANTIDAD PEQUEÑA" DE PUNTOS (FUNCIONES MEROMORFAS)

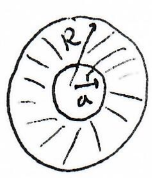
ANTES NECESITAMOS EL CONCEPTO DE:

SERIES DE LAURENT:

EJEMPLO $f(z) = \frac{1}{z-a}$; $f \notin H(D(a,r))$

PERO $f \in H(D(a,R) - \overline{D(a,r)})$; $0<r<R$.

-) f NO CABE QUE SE PUEDA ESCRIBIR COMO UNA SERIE DE TAYLOR CENTRADA EN a



-) AHORA $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$. CON $a_n = 0$ SI $n \neq -1$ Y $a_{-1} = 1$

DEFINICION UNA SERIE FORMAL

$$A(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n \quad \text{CON } a_n, a \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

SE LLAMA SERIE DE LAURENT CENTRADA EN a.

NOTACIÓN:

$A^+(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$ PARTE REGULAR DE LA SERIE (UNA SERIE DE POTENCIAS)

$A^-(z) = \sum_{n < 0} a_n (z-a)^n$ PARTE PRINCIPAL DE LA SERIE

$\rho_1(A) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

¡PESAR SOLO EN LIMITES!

$\rho_2(A) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{a_{-n-1}}{a_{-n}} \right|$

PROPOSICION SEA $A(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ UNA SERIE DE LAURENT. ENTONCES

1:] LA SERIE NUMERICA $A^-(z) = \sum_{n<0} a_n (z-a)^n$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE Y UNIFORMEMENTE PARA $|z-a| \geq r > \rho_2(A)$ Y DIVERGE SI $|z-a| < \rho_2(A)$.

LA FUNCION $A^-(z) \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{D(a, \rho_2(A))})$

Y $(A^-(z))' = \sum_{n<0} n\, a_n (z-a)^{n-1}$

2:] SI $\rho_2(A) < \rho_1(A)$, ENTONCES LA SERIE $A(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ CONVERGE ABSOLUTA Y UNIFORMEMENTE EN TODO EL ANILLO

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \rho_2(A) < r_2 \leq |z-a| \leq r_1 < \rho_1(A)\}$$

$\forall\, r_2$ Y r_1 EN LAS CONDICIONES

$$\rho_2(A) < r_2 < r_1 < \rho_1(A).$$

LA FUNCION $A(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n \in H(\Omega)$

CON $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \rho_2(A) < |z-a| < \rho_1(a)\}$.

Y $A'(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n \cdot a_n (z-a)^{n-1} \quad \forall z \in \Omega$.

DEM 1:] APLICAR EL CRITERIO DEL COCIENTE (COMO SE HACE EN LAS SERIES DE POTENCIAS PARA CALCULAR EL RADIO DE CONVERGENCIA)

$$A^-(z) = f \circ g(z) \quad \text{DONDE} \begin{cases} g(z) = \frac{1}{z-a} \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{D(a, \rho_2(a))}) \\ f(z) = \sum_{n>0} a_{-n} z^n \in H\left(D\left(0, \frac{1}{\rho_2(A)}\right)\right) \end{cases}$$

ASI $A^-(z) \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{D(a, \rho_2(a))})$ Y

$$(A^-(z))' = f'(g(z)) \cdot g'(z) = \sum_{n>0} n a_{-n} \frac{1}{(z-a)^{n-1}} \cdot \frac{-1}{(z-a)^2} = \sum_{n<0} n a_n (z-a)^{n-1}$$

2:] $A(z) = A^-(z) + A^+(z)$ USAR 1:] Y LO ANÁLOGO QUE OCURRE PARA LA SERIE DE POTENCIAS $A^+(z)$

DEFINICIÓN SEA $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \rho_2 < |z-a| < \rho_1\}$.

Y SEA $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. DECIMOS QUE f ES DESARROLLABLE EN SERIE DE LAURENT EN EL ANILLO Ω SI EXISTE UNA SERIE DE LAURENT. $A(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ CON

$$\rho_2(A) \leq \rho_2 < \rho_1 \leq \rho_1(A)$$

TAL QUE $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n \quad \forall z \in \Omega$.

LLAMAREMOS A $A^+(z)$ LA PARTE REGULAR DE f EN Ω
" A $A^-(z)$ LA " PRINCIPAL DE f EN Ω

PROPOSICIÓN: SEA UN ANILLO $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \rho_2 < |z-a| < \rho_1\}$.
Y $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ DESARROLLABLE EN SERIE DE LAURENT EN Ω, e.d $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$. $\forall z \in \Omega$, ENTONCES $f \in H(\Omega)$. Y EL DESARROLLO ANTERIOR ES ÚNICO. EN PARTICULAR SI $\rho_2 < r < \rho_1$ Y $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

Y $M(r) = \max\{|f(z)| : |z-a| = r\}$ SE TIENE

1) $$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} \, dz \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Ejercicio. 2) $$|a_k| \leq \frac{M(r)}{r^k}.$$

OBSERVACIÓN
1) ES LA MISMA FÓRMULA QUE SE OBTENÍA EN EL RESULTADO DE ANALITICIDAD DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS
2) RESULTADO ANÁLOGO AL QUE DA LAS DESIGUALDADES DE CAUCHY.

DEM

CADA FUNCIÓN $f_n(z) = a_n(z-a)^n \in H(\Omega)$

Y $A(z)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE A f

EN Ω (SOBRE COMPACTOS) POR TANTO $f \in H(\Omega)$. (Ejercicio 3: Hoja 4) Corolario teorema de Morera.

AHORA PARA $\rho_1 < r < \rho_2$ LAS SERIES

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n \quad \text{y} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \frac{(z-a)^n}{(z-a)^{k+1}}$$

CONVERGEN UNIFORMEMENTE Y ABSOLUTAMENTE

A LO LARGO DE

$$\gamma(t) = a + re^{it}$$

ASÍ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^{n-k-1}dz =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma a_n(z-a)^{n-k-1}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{a_k}{z-a}dz = a_k \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(a) = a_k$$

EL RESTO DE INTEGRALES VALE POR TENER CADA FUNCIÓN UNA PRIMITIVA

POR OTRO LADO

$$|a_k| \le \left|\frac{1}{2\pi i}\right| \left|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f\circ\gamma(t)|\,|rie^{it}|}{|re^{it}|^{k+1}}dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{M(r)}{r^k}dt = \frac{M(r)}{r^k} \qquad \text{c.q.d.}$$

TEOREMA SEA $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \rho_2 < |z-a| < \rho_1\}$ UN ANILLO Y $f: \Omega \to \mathbb{C}$. SON EQUIVALENTES:

a) f ES DESARROLLABLE EN SERIE DE LAURENT EN Ω

SE USA EN HOJA (91)

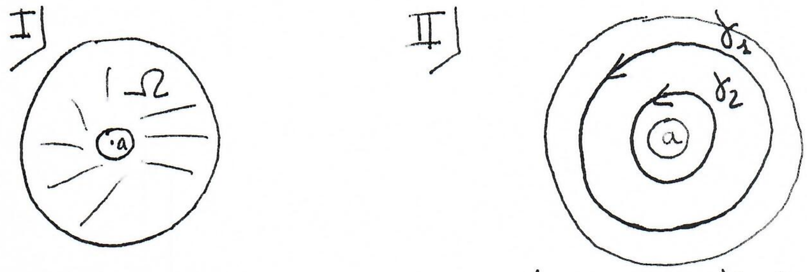
b) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ✓ [$b \Rightarrow a$ DEMOSTRACIÓN 4 CURSO ONES SE NECESITA EL TEOREMA DE CAUCHY GLOBAL]

DEM

$a \Rightarrow b)$ ES LA PROPOSICIÓN ANTERIOR

$b) \Rightarrow a)$ [SIGUIENDO LOS PASOS DEL TEOREMA DE ANALITICIDAD; AHORA USANDO EL TEOREMA DE CAUCHY GLOBAL].

SEAN $\rho_2 < r_2' < r_2 < r_1 < r_1' < \rho_1$ Y SEAN LAS CIRCUNFERENCIAS



$\gamma_1 : a + r_1' e^{it}$ Y $\gamma_2 : a + r_2' e^{it}$ $t \in [0,1]$

SEA EL CICLO $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ | CAMBIAMOS DE ORIENTACIÓN γ_2

ASÍ ES CLARO QUE $\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \notin \Omega$.

PODEMOS APLICAR LA FÓRMULA GLOBAL DE CAUCHY

Y
$$f(z) \cdot \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

$\forall z \in \Omega$.

VAMOS A FIJAR z CON $r_2 \le |z-a| \le r_1$.

EN ESTE CASO $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \operatorname{Ind}_{\gamma_1}(z) - \operatorname{Ind}_{\gamma_2}(z) = 1 - 0 = 1$.

90°

AHORA

I] SI $|\zeta-a| = r_1'$, COMO $|z-a| \leq r_1 < r_1'$

PODEMOS ESCRIBIR.

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)} = \frac{1}{\zeta-a}\,\underbrace{\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}}_{\text{SUMA DE UNA SERIE GEOMETRICA}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

SERIE QUE CONVERGE ABSOLUTAMENTE Y UNIFORMEMENTE EN $|\zeta-a| = r_1'$ ASI

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\left(\sum_{n\geq 0} \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{|\zeta-a|^{n+1}}\right)d\zeta =$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{|\zeta-a|^{n+1}}\,d\zeta\right)(z-a)^n = \sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

CON $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{|\zeta-a|^{n+1}}\,d\zeta.$

II] SEA $|\zeta-a| = r_2'$ COMO $|z-a| \geq r_2 > r_2'$

$$\frac{1}{\zeta-z} = -\frac{1}{z-a}\,\underbrace{\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}}}_{\text{LA SERIE GEOMETRICA}} = -\sum_{n<0} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^n} = \frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}}$$

ESTA SERIE CONVERGE ABSOLUTAMENTE Y UNIFORMEMENTE EN $|\zeta-a| = r_2'$ Y POR TANTO

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\left(\sum_{n<0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n\right)d\zeta =$$

$$= \sum_{n<0}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta\right](z-a)^n.$$

ASI $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ PARA $|z-a| \in [r_2, r_1]$.

POR LA UNICIDAD DEL DESARROLLO DE LAURENT SE TIENE EL RESULTADO EN TODO Ω.