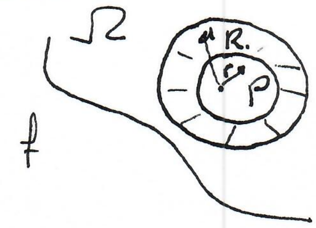
CLASIFICACIÓN DE SINGULARIDADES

DEF Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y sea $p \in \Omega$. (Así $\Omega - \{p\}$ es un abierto). Si

$$f \in H(\Omega - \{p\}).$$

Decimos que p es una singularidad aislada de f



¿Cómo será el comportamiento de f cerca de p?

ATENDIENDO A LOS LÍMITES:

Sea p singularidad aislada de f entonces

a) existe $\lim_{z \to p} f(z)$, y decimos que p es una discontinuidad evitable

o bien

b) $\lim_{z \to p} |f(z)| = \infty$ y decimos que p es un polo de f

o bien

c) no ocurre a) ni b) y decimos que p es una discontinuidad esencial.

ATENDIENDO A LA SERIE DE LAURENT:

Si $f \in H(\Omega - \{p\})$ con Ω abierto y $p \in \Omega$.
Existe una serie de Laurent (este resultado se prueba con el teorema de Cauchy global).

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n = f(z) \quad \forall z \in \left[D(a,R) - \overline{D(a,r)}\right] \subseteq \Omega.$$

Puede ocurrir

a') $a_n = 0 \quad \forall n < 0$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$

o bien

b') $\exists n_0 < 0$ con $a_{n_0} \neq 0$ y $a_n = 0$ para todo $n < n_0$

$$f(z) = \frac{a_{n_0}}{(z-a)^{n_0}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

o bien

c') $\forall n_0 < 0 \quad \exists n < n_0$ con $a_n \neq 0$.

VEAMOS QUE LAS DOS TRIOS DE POSIBILIDADES SON IDÉNTICAS

Los siguientes resultados establecen que a es como a'
b " " b'
y c " " c'

LEMA SI $f \in H(\Omega - \{p\})$ Ω ABIERTO Y $p \in \Omega$.

ENTONCES SON EQUIVALENTES

a) EXISTE $\lim_{z \to p} f(z)$

b) $|f|$ ESTA ACOTADA EN UN ENTORNO DE p

(e.d. $\exists M > 0$ y $\exists r > 0$ CON $|f(z)| < M$ $\forall z \in D(p, r)$. (PRACTICA)

DEM a) $\Rightarrow$ b) ES OBVIO POR CONTINUIDAD.

b) $\Rightarrow$ a) SEA $h(z) = (z-p)^2 f(z) \in H(\Omega - \{p\})$.

ADEMÁS $\lim_{z \to p} h(z) = (z-p)^2 f(z) = 0$

$$|(z-p)^2 f(z)| \leq M|z-p|^2 \xrightarrow[z \to p]{} 0$$

POR TANTO

$$\lim_{z \to p} \frac{h(z) - h(p)}{z-p} = \lim_{z \to p} (z-p) f(z) = 0$$

ASI $h(z) \in H(\Omega)$ CON $h'(0) = 0$ y $h(0) = 0$

ASI $h(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k)}(p)}{k!} (z-p)^k$

Y POR TANTO $f(z) = \frac{h(z)}{(z-p)^2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k)}(p)}{k!} (z-p)^{k-2} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{k+2)}(p)}{(k+2)!} (z-p)^k \quad \forall z \in D(p, r') - \{p\}.$$

POR TANTO $\lim_{z \to p} f(z) = \frac{h''(p)}{2}$.

TEOREMA (RIEMANN). SEA $f \in H(\Omega - \{p\})$ Ω ABIERTO Y $p \in \Omega$. SI p ES UNA SINGULARIDAD EVITABLE Y SI SE DEFINE $f(p) = \lim_{z \to p} f(z)$ ENTONCES $f \in H(\Omega)$.

OBSERVACION: LO CUAL ES EQUIVALENTE A QUE f TENGA UN DESARROLLO EN SERIE DE TAYLOR CENTRADO EN p E.D. $\exists r > 0$ CON $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ $\forall z \in D(p, r)$.

DEM SEA $f \in H(\Omega - \{p\})$ Y f ES CONTINUA EN Ω USANDO EL TEOREMA DE MORERA JUNTO CON EL TEOREMA DE CAUCHY PARA TRIANGULOS $\Rightarrow f \in H(\Omega)$

OBSERVACION: SI $f \in H(\Omega - \{p\})$ TIENE UNA DESIGUALDAD EVITABLE EN p Y SI

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-p)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-p)^n} + g(z)$$ CON g HOLOMORFA.

SI $\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad a_{-n} = 0$, ENTONCES

$$\lim_{z \to p} \left| \sum_{n=1}^{n_0} \frac{a_{-n}}{(z-p)^n} + g(z) \right| \begin{cases} \text{ESTA ACOTADO SI } a_{-n} = 0 \ \forall n \\ \infty \quad \text{SI } \exists\, a_{-n} \neq 0. \end{cases}$$

DEFINICION a) SEA $f \in H(\Omega)$ Y SEA $a \in \Omega$ CON $f(a) = 0$. SE DICE QUE f TIENE EN "a" UN CERO DE ORDEN (*) $m \geq 1$ SI

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{k)}(a)}{k!} (z-a)^k \quad \text{CON } f^{m)}(a) \neq 0.$$

b) SEA $f \in H(\Omega - \{p\})$ CON p UN POLO DE f (E.D. $\lim_{z \to p} |f(z)| = \infty$). COMO $\frac{1}{f(z)} = g(z)$ Y $g(p) = 0$, ES TAL QUE $g \in H(D(p,r))$ PARA ALGUN $r > 0$, SE DICE QUE p ES UN POLO DE ORDEN $m \geq 1$ SI p ES UN CERO DE ORDEN m DE $\frac{1}{f}$.

PROPOSICION: SEA Ω ABIERTO DE $\mathbb{C}$ Y $p \in \Omega$. CON $f \in H(\Omega - \{p\})$. SON EQUIVALENTES:

a) f TIENE UN POLO EN p DE ORDEN m.

b) $\frac{1}{f}$ TIENE UN CERO EN p DE ORDEN m.

c) $g(z) := (z-p)^m f(z)$ TIENE UNA SINGULARIDAD EVITABLE EN p Y $g(p) := \lim_{z \to p} g(z) \neq 0$.

(*) O MULTIPLICIDAD.

DEM a) ⇒ b) POR DEFINICION DE ORDEN DE UN POLO

b) ⇒ c) SI $\frac{1}{f(z)}$ TIENE UN CERO DE ORDEN m EN p

$$h(z)=\frac{1}{f(z)}=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{h^{k)}(p)}{k!}(z-p)^k=$$

$h^{m)}(p)\neq 0$

$$=(z-p)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^{k+m)}(p)}{(k+m)!}(z-p)^k \quad \text{CON } \frac{h^{m)}(p)}{m!}\neq 0$$

ASI $$\frac{1}{f(z)(z-p)^m}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^{k+m)}(p)}{(k+m)!}(z-p)^k\in \mathcal{H}(D(p,r'))$$

Y $$\lim_{z\to p}\frac{1}{f(z)(z-p)^m}=\frac{h^{m)}(p)}{m!}\neq 0$$

LUEGO $g(z):=f(z)\cdot(z-p)^m\in \mathcal{H}(\Omega)$ Y $g(p)\neq 0$.

c) ⇒ a) SI $g\in\mathcal{H}(\Omega)$ CON $g(p)\neq 0$

ENTONCES $$|f(z)|=\left|\frac{g(z)}{(z-p)^m}\right|\xrightarrow[z\to p]{}\infty$$

LUEGO f TIENE UN POLO EN p. Y ADEMÁS

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-p)^m}{g(z)}=(z-p)^m\frac{1}{g(z)} \quad \text{COMO } \frac{1}{g(z)}\in\mathcal{H}(D(p,\varepsilon)).$$

$g(p)\neq 0$

CLARAMENTE $\frac{1}{f}$ TIENE UN CERO DE ORDEN m EN p

EJEMPLOS:

1) $f(z)=\frac{a_n z^n+\dots+a_1 z+a_0}{b_m z^m+\dots+b_1 z+b_0}$ LAS RAICES DE $b_m z^m+\dots+b_1 z+b_0$ SON CANDIDATAS A SER POLOS DE LA FUNCIÓN

2) $f(z)=\operatorname{sen}\frac{1}{z}$ $\qquad \operatorname{sen} z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ ASI

$$\operatorname{sen}\frac{1}{z}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{z^{2k+1}(2k+1)!}$$

LUEGO $z=0$ DESIGUALDAD ESENCIAL.

TEOREMA (DE CASORATI - WEIERSTRASS).

SI $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$ CON Ω ABIERTO Y p UNA SINGULARIDAD ESENCIAL DE f ENTONCES $\forall \varepsilon > 0$ SE TIENE QUE $f(D(p,\varepsilon) - \{p\})$ ES DENSO EN $\mathbb{C}$ (E.D. $\overline{f(D(p,\varepsilon) - \{p\})} = \mathbb{C}$).

DEM SI EXISTE $\varepsilon > 0$ CON $D(p,\varepsilon) \subseteq \Omega$ Y PRUEBA POR REDUCCIÓN AL ABSURDO

DE MODO QUE $f(D(p,\varepsilon) - \{p\})$ NO ES DENSO EN $\mathbb{C}$, ENTONCES EXISTE $z_0 \in \mathbb{C}$ Y $\delta > 0$ CON

$$|f(z) - z_0| > \delta \quad \forall z \in D(p,\varepsilon) - \{p\}$$

SE CONSIDERA

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - z_0} \in H(D(p,\varepsilon) - \{p\})$$

AHORA

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - z_0|} < \frac{1}{\delta} \quad \forall z \in D(p,\varepsilon) - \{p\}$$

Y TIENE EN p UNA SINGULARIDAD EVITABLE Y DEFINIENDO

LUEGO POR EL LEMA ANTERIOR

$$g(p) = \lim_{z \to p} g(z)$$ SABEMOS QUE $g \in H(D(p,\varepsilon))$.

COMO $g(z) \neq 0 \quad \forall z \in D(p,\varepsilon) - \{p\}$,

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + z_0$$

SI $g(p) \neq 0$, ENTONCES $\exists \lim_{z \to p} f(z)$ LO CUAL NO ES POSIBLE POR HIPÓTESIS

ASÍ $g(p) = 0$ Y $g(z) = \sum_{\underline{k=m \geq 1}}^{\infty} \frac{g^{k)}(p)}{k!}(z-p)^k \;\; \underset{\text{CON } g^{m)}(p) \neq 0}{=}$

$$= (z-p)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k+m)}(p)}{(k+m)!}(z-p)^k = (z-p)^m \cdot g_1(z) \quad \text{CON } g_1(p) \neq 0$$

ASÍ $f(z) = \frac{1}{g(z)} + z_0 = \frac{1}{(z-p)^m g_1(z)} + z_0 \Rightarrow \lim_{z \to p} |f(z)| = \infty$

ASÍ f TENDRÍA UN POLO EN $z = p$ LO CUAL NO ES POSIBLE

CEROS DE FUNCIONES HOLOMORFAS

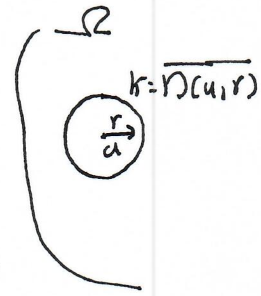
PROP Si $f \in H(\Omega)$, Ω abierto conexo y $f \not\equiv 0$. Sea $S = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$. Entonces S es discreto (e.d. $\forall z \in S$ $\exists r > 0$ con $D(z,r) \cap S = \emptyset$).

DEM Si $\exists z_0 \in S$ y $(z_n) \subseteq S$ con $z_n \to z_0$ $\in \Omega$.
por los teoremas de identidad $f \equiv 0$!!

COROLARIO: Si $f \in H(\Omega)$, Ω abierto conexo y $f \not\equiv 0$ y si $K \subseteq \Omega$ es un compacto, entonces

$$S = \{z \in K : f(z) = 0\}$$

S es finito.



EJEMPLO: Sea $f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{1-z}\right)$ $z \in D(0,1)$

$f \in H(D(0,1))$. Sea $z_j = 1 - \frac{1}{j\pi}$ $j \in \mathbb{N}$

$f(z_j) = 0$ $\forall j \in \mathbb{N}$ y $z_j \longrightarrow 1 \in \partial D(0,1)$

y $f \not\equiv 0$

Así f no se puede prolongar de forma analítica a $\overline{D(0,1)}$