FUNCIONES MEROMORFAS

DEFINICION SI $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ES UN ABIERTO Y $f: \Omega \to \mathbb{C}$ DECIMOS QUE f ES MEROMORFA SI EXISTE $A \subseteq \Omega$ TAL QUE

a) A ES DISCRETO EN Ω. (E.D. A NO TIENE PUNTOS DE ACUMULACION EN Ω)

b) $f \in H(\Omega - A)$

c) f TIENE UN POLO EN CADA PUNTO DE A.

OBSER SI $A = \emptyset$, f ES HOLOMORFA

EJEMPLO SI $P(z)$ Y $Q(z)$ SON POLINOMIOS, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ ES MEROMORFA

DESARROLLO EN SERIE DE FUNCIONES MEROMORFAS:

SI $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ES MEROMORFA

a) SI $z_0 \in \Omega - A$ $\exists \varepsilon > 0$ TAL QUE

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad \forall z \in D(z_0, \varepsilon)$$

b) SI $a \in A$, POLO DE ORDEN m, $\exists \varepsilon > 0$ Y $g \in H(D(a, \varepsilon))$ CON $g(a) \neq 0$ TAL QUE

$$g(z) = (z-a)^m f(z)$$

COMO $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k)}(a)}{k!} (z-a)^k$ SE SIGUE

QUE $f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k+m)}(a)}{(k+m)!} (z-a)^k$.

DEFINICION SI f TIENE UN POLO EN a SE LLAMA RESIDUO DE f EN a $\operatorname{Res}(f, a) = a_{-1}$ (EL COEFICIENTE DE $\frac{1}{z-a}$ DEL DESARROLLO DE LAURENT CENTRADO EN a DE f)

COROLARIO SI $f \in H(\Omega)$, Ω ABIERTO Y $f \not\equiv 0$, ENTONCES $\frac{1}{f}$ ES MEROMORFA.

DEM COMO VIMOS EL CONJUNTO DE CEROS DE UNA FUNCION HOLOMORFA NO NULA ES DISCRETO.

TEOREMA DE LOS RESIDUOS

TEOREMA DE LOS RESIDUOS (PARA ABIERTOS CONVEXOS)

SEA $f: \Omega \to \mathbb{C}$ UNA FUNCIÓN MEROMORFA CON Ω ABIERTO CONVEXO DE MODO QUE $f \in H(\Omega - A)$ CON A FINITO. SEA $\gamma^* \subseteq \Omega$ UN CAMINO CERRADO CON $\gamma^* \cap A = \emptyset$. ENTONCES

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f, a) \operatorname{Ind}_\gamma(a)$$

FÓRMULA DE LOS RESIDUOS

OBSERVACIÓN: LAS HIPÓTESIS Ω CONVEXO Y A FINITO SE PUEDEN QUITAR, USANDO SOLO QUE $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0 \ \forall \alpha \notin \Omega$ Y TENIENDO EN CUENTA EL TEOREMA DE CAUCHY-GLOBAL

NO SE USA

DEM γ^* ES COMPACTO Y A FINITO ASÍ $\exists R > 0$ CON $D(0, R)$ VERIFICANDO

$\gamma^* \subseteq D(0, R)$

$A \subseteq D(0, R)$

$\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} - D(0, R)$

Y $D(0, R) \cap \Omega$ ES CONVEXO E INCLUYE A γ^* Y A.

USAMOS EL RESULTADO DE LA HOJA 89 SIN PRUEBA PUES USA EL TEOREMA DE CAUCHY-GLOBAL

SEA $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, PARA CADA a_j $f \in H(D(a_j, r_j) - \{a_j\})$. ASÍ PODEMOS DESARROLLAR f EN SERIE DE LAURENT CENTRADA EN a_j; SEA Q_j LA PARTE PRINCIPAL DE ESTE DESARROLLO.

COMO CADA a_j ES UN POLO

$$Q_j(z) = \sum_{n=1}^{N_j} c_{-n}^{j} (z - a_j)^{-n} \in H(\mathbb{C} - \{a_j\})$$

LA SUMA ES FINITA POR SER a_j UN POLO

SE DEFINE $g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{n} Q_j(z)$

CLARAMENTE $g \in H(\Omega)$ YA QUE TIENE SINGULARIDADES EVITABLE EN $a_1, a_2 - - a_n$

COMO $\gamma \subseteq \Omega$ POR EL TEOREMA DE CAUCHY PARA CONJUNTOS CONVEXOS

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_\gamma Q_j(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_j)\, \operatorname{Ind}_\gamma(a_j).$$

DESPEJANDO SE SIGUE QUE

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_j)\, \operatorname{Ind}_\gamma(a_j).$$

c.q.d.

EJEMPLOS

RESOLVER INTEGRALES REALES USANDO LA FÓRMULA DE LOS RESIDUOS ES TODO UN "ARTE". DAREMOS DOS EJEMPLOS A TÍTULO INFORMATIVO.

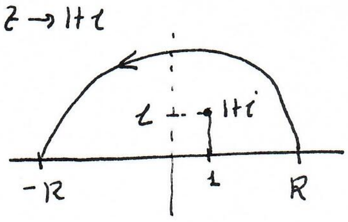
CALCULAR $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2-2x+2}\,dx$.

SEA $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2-2z+2} = \dfrac{e^{iz}}{(z-(1+i))(z-(1-i))} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{1+i,1-i\})$

f ES MEROMORFA CON POLOS DE ORDEN 1 EN $1+i$ Y $1-i$ $\left[\dfrac{1}{f} = (z-(1+i))\dfrac{(z-(1-i))}{e^{iz}}\right]$

$$\operatorname{Res}(f,1+i) = \lim_{z\to 1+i}(z-(1+i))f(z) = \frac{e^{i(1+i)}}{(1+i)-(1-i)} = \frac{e^{i-1}}{2i}$$

SEA Γ_R



FÓRMULA DE CÁLCULO EN HOJA DE PROBLEMAS

NOTA: SI $\exists \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)$ Y $\exists \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^0 f(x)$ $\Rightarrow \exists \int_{-\infty}^{\infty} f(x) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f + \int_{-R}^0 f$

* Ejemplo $\int_{-\infty}^{\infty} x$ NO EXISTE

NO EXISTE $\int_0^\infty x$ NI $\int_{-\infty}^0 x$

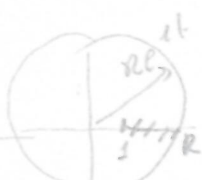
PERO EXISTE $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} x = 0$

$$2\pi i\left(\frac{e^{i-1}}{2i}\right) = \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\Gamma'_R} \frac{e^{iz}}{z^2-2z+2}\,dz$$

$\Gamma'_R = \{|z| = R \quad \operatorname{Im} z > 0\}$

$$\left|\int_{\Gamma'_R}\frac{e^{iz}}{z^2-2z+2}\,dz\right| \le \sup_{z\in\Gamma'_R}\left|\frac{e^{iz}}{z^2-2z+2}\right|\cdot \operatorname{Long}\Gamma'_R \le$$

$z = Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$



$$\le \sup_{\substack{t\in[0,\pi]\\ z=Re^{it}}} \frac{e^{-R\operatorname{sen} t}}{|z^2-2z+2|}\,\pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$|(z-1)^2+1| \geq |z-1|^2 \geq (R-1)^2$

$\big||z^2|-|2z|-2\big| \le |z^2-2z|-2| \le |z^2-2z+2|$.

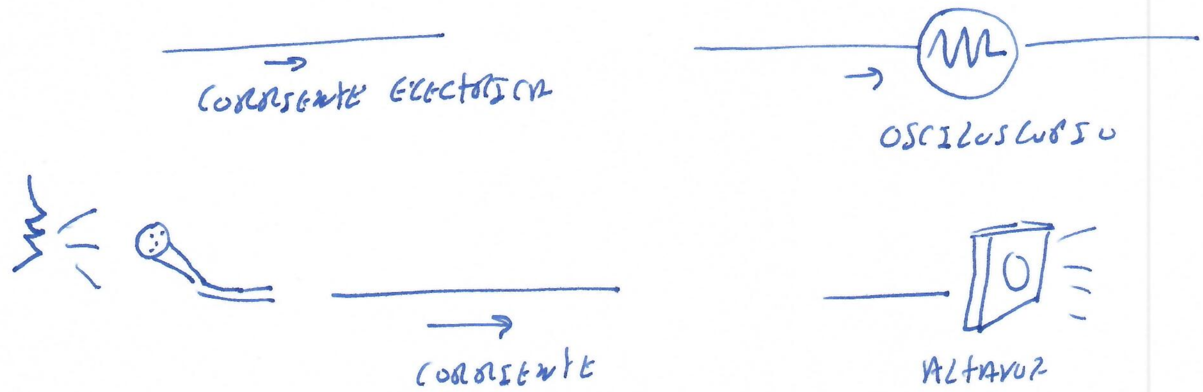
ASÍ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\cos x}{x^2-2x+2} + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2-2x+2}\,dx = \pi e^{i-1} =$$

$$= \pi e^{-1}(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1)$$

LUEGO $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{\pi}{e}\operatorname{sen} 1.$

OBSERVACIÓN



CORRIENTE = "SEÑAL" $f(t)=\begin{cases} f(t) & t\in[-A,A] \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$

t tiempo, $f(t)$ magnitud física $\begin{cases}\text{- voltaje}\\ \text{- intensidad}\end{cases}$

Ejemplo $f(t)=\cos 3t\big|_{[-\pi,\pi]}$

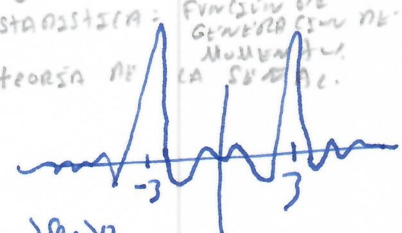
Periodo de f es $\frac{2\pi}{3}$ y la frecuencia $\frac{3}{2\pi}$.

Def para $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\hat{f}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-ist}\,dt$

transformada de Fourier

LOCALIZADOR DE FRECUENCIAS

Útil: - resolver ec diferenciales (parecido t. de Laplace)
- estadística: función de generación de momentos.
- teoría de la señal.



Ejemplo $f(t)=\cos 3t\big|_{[-\pi,\pi]}$

$\hat{f}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos 3t\cdot\chi_{[-\pi,\pi]}(t)\cdot e^{-ist}\,dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{s\,\mathrm{sen}\,s\pi}{9-s^2}$ (frecuencias localizadas)

Dem

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 3t\cos st\,dt-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos 3t\,\mathrm{sen}\,st\,dt}_{\text{impar}}$ // integral nula

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 3t\cos st\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cos(3t+st)+\frac{1}{2}\cos(3t-st)\,dt=$

$\cos A\cos B=\frac{1}{2}(\cos(A+B)+\cos(A-B))$

$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{sen}(3+s)t}{3+s}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{sen}(3-s)t}{3+s}\,dt=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2\,\mathrm{sen}(3+s)\pi}{3+s}+\frac{2\,\mathrm{sen}(3-s)\pi}{3-s}\right]=$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\mathrm{sen}\,3\pi\cos s\pi+\cos 3\pi\,\mathrm{sen}\,s\pi}{3+s}+\frac{\mathrm{sen}\,3\pi\cos(-s\pi)+\cos 3\pi\,\mathrm{sen}(-s\pi)}{3-s}\right]=$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{-\mathrm{sen}\,s\pi}{3+s}+\frac{\mathrm{sen}\,s\pi}{3-s}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{9-s^2}\left[-(3-s)\,\mathrm{sen}\,s\pi+(3+s)\,\mathrm{sen}\,s\pi\right]=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{s\,\mathrm{sen}\,s\pi}{9-s^2}$

OBSERV. La integral de hoja 100) sería parte de cálculo de $\hat{f}$ para $f(t)=\frac{1}{t^2+1}$