PROPOSICIÓN $\mathbb{C}$ CON LA SUMA Y EL PRODUCTO ES UN CUERPO

DEM - LA SUMA COMO LA DE $\mathbb{R}^2$ ES CONMUTATIVA, ASOCIATIVA, $(0,0)$ ES EL ELEMENTO NEUTRO Y $\forall\, a+bi$ SE SIGUE QUE $-a-bi$ ES EL OPUESTO

- EL PRODUCTO ES

Ejercicio
- ASOCIATIVO
- CONMUTATIVO
- $1+0i$ ES EL ELEMENTO NEUTRO

Y $\forall\, a+bi \in \mathbb{C}$, DISTINTO DEL 0

$\exists\ c+di$ CON $(a+bi)(c+di)=1$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ac-bd=1 \\ bc+ad=0 \end{array}\right.$$

RESOLVIENDO EL SISTEMA

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$d = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{-b}{a^2+b^2} \qquad \underline{\text{ÚNICO}}$$

Ejercicio $(\mathbb{C}, +, \times)$ TIENE LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

- ADEMÁS $\mathbb{R} \xrightarrow{i} \mathbb{C}$, $x \longrightarrow x+0i$ ES UN ISOMORFISMO DE $\mathbb{R}$ EN $i(\mathbb{R})$.

- ADEMAS $\mathbb{C}$ VISTO COMO $\mathbb{R}^2$ ES UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{C}$ NO ES UN CUERPO ORDENADO COMO $\mathbb{R}$

DEM SI $\mathbb{C}$ FUESE UN CUERPO ORDENADO $i>0$ ó $0>i$

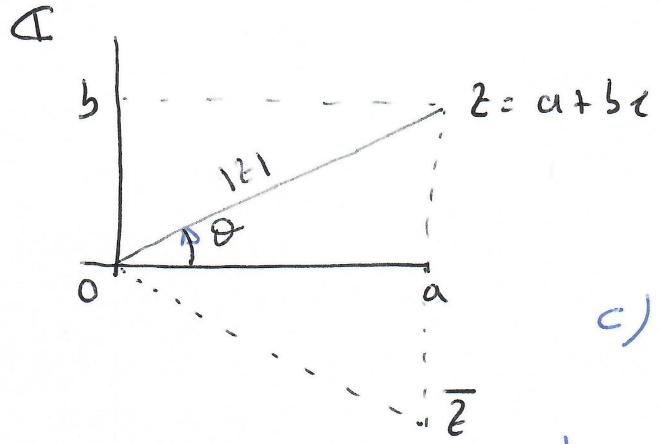
1º) CASO $i>0 \Leftrightarrow i\cdot i > i\times 0 \Leftrightarrow -1>0$!!

2º) CASO $i<0 \Leftrightarrow i\cdot i > i\times 0 \Leftrightarrow -1>0$!!

$i<0$

ÁNGULOS Y DISTANCIAS

¿Tiene algún sentido geométrico el producto de complejos, como lo tiene la suma?



DEFINICIONES: Sea $z = a+bi \in \mathbb{C}$

a) $a = \operatorname{Re} z$ parte real

b) $b = \operatorname{Im} z$ parte imaginaria

c) $\bar{z} = \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z = a - bi$ conjugado de z.

d) $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ módulo de z

(distancia del origen a z; distancia euclidea)

e) $\operatorname{Arg} z$ argumento de z es el ángulo formado desde el eje de las x hasta el segmento $\overline{Oz}$.

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arccos} \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad \text{si } \operatorname{Im} z > 0$$

$$\text{y } \operatorname{Arg} z = \pi + \operatorname{Arccos} \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad \text{si } \operatorname{Im} z < 0$$

OBSERVACIONES

- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
- $|z - z_0|$ distancia de z a z_0
- $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ disco abierto
- $\overline{D(z_0, R)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ disco cerrado

DEF forma polar de un número complejo.

Si $z \in \mathbb{C}$ $\quad z = a+bi = |z|\left[\cos(\operatorname{Arg} z) + i \operatorname{sen} \operatorname{Arg} z\right]$

DEM fácil $\frac{z}{|z|} \in \partial D(0,1)$ y así $\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}^2 + \frac{(\operatorname{Im} z)^2}{|z|} = 1$,

$\exists\, \theta \in [0, 2\pi)$ con $\cos\theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ y $\operatorname{sen}\theta\ \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$ con $\theta = \operatorname{Arg} z$ por definición de argumento, así se tiene el resultado

(5)

PROPIEDADES DE LA CONJUGACIÓN:

a) $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$ y $z \cdot \bar{z} \geq 0$. ADEMÁS $z \cdot \bar{z} = 0 \iff z = 0$

b) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

c) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$; SI $k \in \mathbb{R}$ $\overline{kz} = k\bar{z}$

d) $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$

e) $z = \bar{\bar{z}}$

f) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ y ASÍ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

EJEMPLO

•) $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{2} =$ (MULTIPLICAR POR EL CONJUGADO) $= \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$

••) $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}$

•••) $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{|z|^2}$

DEM EJERCICIO

EJERCICIO $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$z \to f(z) = \bar{z}$ ES UNA APLICACIÓN BIYECTIVA Y CONTINUA

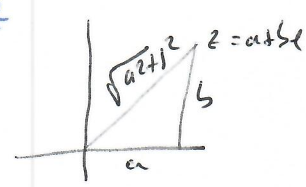
$x + yi \longrightarrow x - yi$

EJERCICIO SEA $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ UNA ECUACIÓN POLINÓMICA DE COEFICIENTES REALES ($a_i \in \mathbb{R}$ $i = 0, 1, \dots n$). SI $z_0 \in \mathbb{C}$ ES RAÍZ DE LA ECUACIÓN PROBAR QUE $\bar{z}_0$ TAMBIÉN LO ES.

ADEMÁS PRUEBA QUE $(x - z_0)(x - \bar{z}_0)$ ES UN POLINOMIO DE 2º GRADO EN x DE COEFICIENTES REALES.

PROPIEDADES DEL MÓDULO:

DEF SI $z \in \mathbb{C}$, MÓDULO DE $|z| = \sqrt{\operatorname{Re} z^2 + \operatorname{Im} z^2}$ (DISTANCIA CARTESIANA DEL PUNTO z A 0)



OBSERVACIÓN: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

PROPIEDADES:

1) $|z| \geq 0$ y $|z| = 0 \iff z = 0$

2) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ $\quad \Big\{ \forall z, w \in \mathbb{C}$

3) $|z + w| \leq |z| + |w|$

DEM 1) ES CLARO POR DEFINICIÓN

2) $|z \cdot w|^2 = (z \cdot w)(\overline{z \cdot w}) = (z \cdot \bar{z})(w \bar{w}) = |z|^2 |w|^2$

Dem 3:)

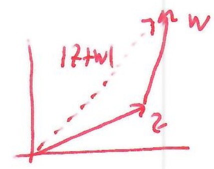
LEMA a) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$

b) $\overline{\bar{z} w} = z \bar{w}$

c) $\bar{z} w + z \bar{w} = 2 \operatorname{Re}(\bar{z} w)$

d) $|z| = |\bar{z}|$

SIGNIFICADO:



DEM Ejercicio

ASÍ $|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = z \cdot \bar{z} + w\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{w} =$

$= |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(w\bar{z}) + |w|^2 \leq$

$\leq |z|^2 + 2|w\bar{z}| + |w|^2 =$

$= |z|^2 + 2|w||\bar{z}| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2.$

DEF Sea X espacio vectorial y sea

$\| \ \| \ X \longrightarrow [0, \infty)$

$x \longrightarrow \|x\|$ que verifica

- $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in X$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$\| \ \|$ se llama norma sobre X

Ejemplo $(\mathbb{R} \ | \ |)$ es espacio normado

$(\mathbb{C} \ | \ |)$ "
módulo

Con una norma es fácil definir una distancia y por tanto una topología métrica sobre $\mathbb{C}$.

PROPIEDADES DEL ARGUMENTO:

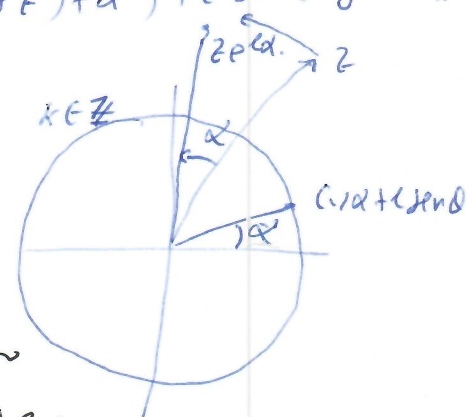
1) $z \in \mathbb{C}$ $\quad z = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \operatorname{sen} \operatorname{Arg} z)$.

2) $z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2))$

ASÍ $\quad z^n = |z|^n(\cos n(\operatorname{Arg} z) + i\operatorname{sen}(n \operatorname{Arg} z))$

ASÍ $\quad z\cdot(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) = |z|(\cos(\operatorname{Arg} z + \alpha) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Arg} z+\alpha))$

3) $\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi. \quad k\in\mathbb{Z}$



OBSERVACIÓN LA MULTIPLICACIÓN DE COMPLEJOS TIENE SENTIDO GEOMÉTRICO ES UN GIRO JUNTO CON UNA HOMOTECIA (GAUSS Y OTROS PRINCIPIO SIGLO XIX)

DEM 1) FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

2) $z_1\cdot z_2 = |z_1|(\cos \operatorname{Arg} z_1 + i \operatorname{sen}\operatorname{Arg} z_1)\cdot|z_2|(\cos\operatorname{Arg} z_2 + i\operatorname{sen}\operatorname{Arg} z_2) =$

ESCRIBIENDO EN FORMA POLAR

$$= |z_1||z_2|\big((\cos \operatorname{Arg} z_1 \cos\operatorname{Arg} z_2 - \operatorname{sen}\operatorname{Arg} z_1 \operatorname{sen}\operatorname{Arg} z_2)$$

$$+ i(\cos\operatorname{Arg} z_1 \operatorname{sen}\operatorname{Arg} z_2 + \operatorname{sen}\operatorname{Arg} z_1 \cos\operatorname{Arg} z_2)$$

$$= |z_1||z_2|(\cos(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) + i\operatorname{sen}(\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2))$$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{sen}(a+b) = \cos a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} b \cos a$

RESTO EJERCICIO.

OBSERVACIÓN: RAÍCES DE UN NÚMERO COMPLEJO

SEA $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ y $n \in \mathbb{N}$ $\quad \sqrt[n]{z} = w = |w|(\cos\rho + i\operatorname{sen}\rho)$

CON $w^n = \begin{cases} z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \\ |w|^n(\cos n\rho + i\operatorname{sen} n\rho)\end{cases}$ ASÍ $\begin{cases}|w|^n = |z| \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ n\rho = \theta + 2k\pi\end{cases}$

ASÍ $\rho = \dfrac{\theta+2k\pi}{n}$ $\quad k = 0,1,2\ldots n-1$ SI k ES MAYOR O MENOR REPETIMOS

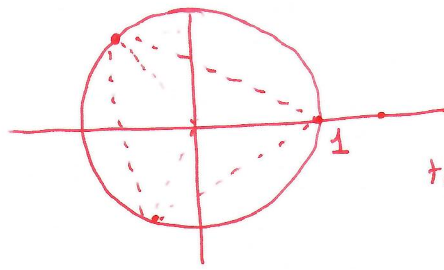
POR TANTO n RAÍCES.

Ejemplos RAÍCES DE LA UNIDAD

$\sqrt[n]{1}$ como $1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} \theta$ y $|1| = 1$

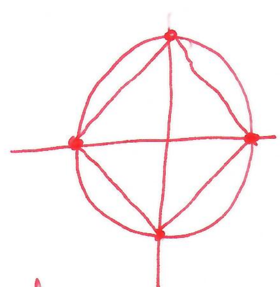
$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, \ldots n-1$$

$\sqrt[3]{1}$



TRIÁNGULO EQUILÁTERO

$$\sqrt[4]{1} = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{4} \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$



CUADRADO

-ede.