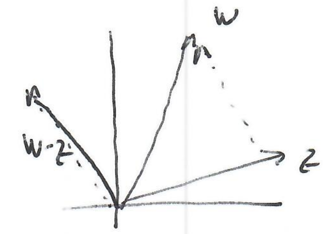
TOPOLOGÍA EN $\mathbb{C}$

Usando el módulo de $\mathbb{C}$ se puede definir una métrica ó distancia sobre $\mathbb{C}$

$$d: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow [0, \infty)$$
$$(z, w) \longrightarrow d(z,w) = |z-w|$$



$\left(|z-w| = \sqrt{(\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} w)^2} \right)$

la distancia euclídea entre los puntos z y w del plano

PROPIEDADES $\forall z, w, u \in \mathbb{C}$

a) $|z-w| \geq 0$ y $|z-w| = 0 \iff z = w$

b) $|z-w| = |w-z|$

c) $|z-w| \leq |z-u| + |u-w|$.

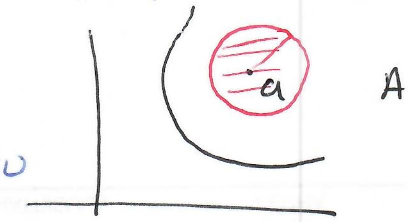
DEM c) $|z-w| = |z-u+u-w| \leq |z-u| + |u-w|$
propiedad triangular del módulo

Esta métrica permite definir una topología métrica $\mathcal{T}$

$A \subseteq \mathcal{T}$ es abierto $\iff \forall a \in A\ \exists r > 0$ con $D(a,r) \subseteq A$

C es cerrado si

$C^c = \mathbb{C} - C$ es abierto



$K \subseteq \mathbb{C}$ es compacto si es cerrado y acotado

$(\mathbb{C}, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}^2$: topología euclídea$) = (\mathbb{R}^2$ con la topología usual$)$

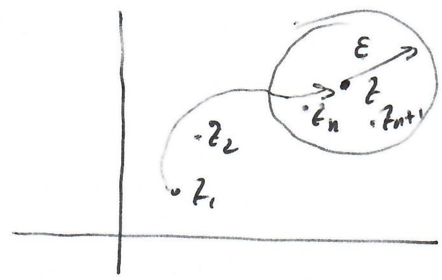
EJEMPLO $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ y $\forall r \in \mathbb{R}$, $r > 0$
- $D(z_0, r)$ es un conjunto abierto
- $\overline{D}(z_0, r)$ es un conjunto compacto

$\mathbb{C}$ es un espacio métrico, completo, separable y conexo.

Def Sea $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$ una sucesión. Se dice que $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z$ ($(z_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a z) si

$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 : n \geq n_0$ se tiene que $|z-z_n|<\varepsilon$

($\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 : n\geq n_0 \ z_n \in D(z,\varepsilon)$).



Observación Si $z_n = a_n + b_n i \xrightarrow[n\to\infty]{} z = a+bi$ esto es posible si y solo si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ y $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$

Def $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$ una sucesión es de Cauchy si y solo si $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 : m,n\geq n_0 \Rightarrow |z_n-z_m|<\varepsilon$

Teorema $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$ es de Cauchy $\Leftrightarrow$ (z_n) es convergente

Dem $\Leftarrow$) Si $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z$ entonces $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 : n,m\geq n_0$

$$|z_n-z_m| \leq |z_n-z| + |z_m-z| \leq \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$$

$\Rightarrow$) Si $(z_n = a_n+b_n i)_{n=1}^{\infty}$ de Cauchy

como $|a_n-a_m| \leq |z_n-z_m|$

y $|b_n-b_m| \leq |z_n-z_m| \Rightarrow (a_n)$ y (b_n) son de Cauchy como sucesiones de números reales

así $\exists a,b \in \mathbb{R}$ con $\begin{cases} a_n \to a \\ b_n \to b \end{cases}$

Ejercicio Probar que $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z = a+bi$

11

OBSERVACIÓN

- EL TEOREMA ANTERIOR NOS DICE QUE $\mathbb{C}$ ES COMPLETO.
- POR OTRO LADO ES SEPARABLE

(SEA $\{p + q\,i : p, q \in \mathbb{Q}\}$.

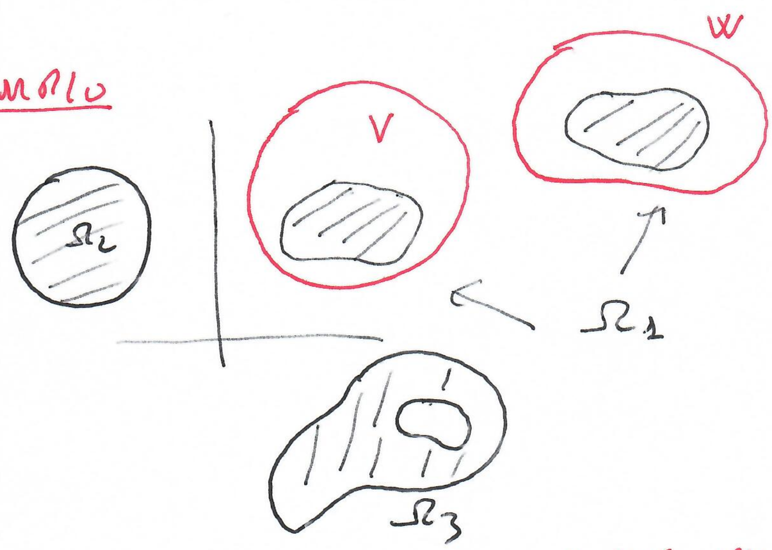
$$\text{Card } \{p + qi : q, p \in \mathbb{Q}\} = \text{Card } \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \text{Card } \mathbb{N}$$

ADEMÁS $\overline{\{p + qi : p, q \in \mathbb{Q}\}} = \mathbb{C}$

CONEXIÓN:

DEF $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ES CONEXO SI <u>NO</u> EXISTEN CONJUNTOS ABIERTOS $V, W \subseteq \mathbb{C}$ CON $V \cap W = \emptyset$ Y TALES QUE $\Omega \subseteq V \cup W$. CON $\Omega \cap V \neq \emptyset$ Y $\Omega \cap W = \emptyset$

EJEMPLO



Ω_1 NO CONEXO

Ω_2 CONEXO.

Ω_3 CONEXO (PERO CON UN AGUJERO)

MAS ADELANTE HABLAREMOS DE CONEXIÓN POR CAMINO Y VEREMOS QUE CONEXO POR CAMINOS IMPLICA CONEXO

PROPOSICIÓN Si $E \subseteq \mathbb{C}$ es cerrado y no conexo, entonces E es la unión de dos conjuntos cerrados disjuntos.

DEM $\exists V, W$ abiertos con $V \cap W = \emptyset$

$$E \subseteq V \cup W \quad y \quad \begin{cases} E \cap V \neq \emptyset \\ E \cap W \neq \emptyset \end{cases}$$

Así $\emptyset \neq W \cap E \subseteq V^c \cap E = C_1$ cerrado

$\emptyset \neq V \cap E \subseteq W^c \cap E = C_2$ cerrado

$C_1 \cap C_2 = \emptyset$, si no $\exists x \in V^c \cap E = V^c \cap (E \cap (V \cup W))$

$= \underbrace{V^c \cap (E \cap V)}_{\emptyset} \cup V^c \cap (E \cap W)$.

Del mismo modo $x \in V$!! $\quad x \in W$

$C_1 \cup C_2 = E$ ya que $E = (W \cup V) \cap E =$

$= (E \cap W) \cup (E \cap V) = C_1 \cup C_2$.

EJERCICIO Si $E \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y no conexo, entonces es ~~E~~ la unión de dos conjuntos abiertos no vacíos y disjuntos

DEM $E \cap V$ y $E \cap W$.

DEFINICIÓN Dado un conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$, se llama componente conexa de E a todo subconjunto $A \subseteq E$ conexo y tal que no existe $B \subseteq E$ conexo tal que $A \subsetneq B$.

EJERCICIO Dado un conjunto E, si A_1 y A_2 son componentes conexas de E, entonces $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ y por tanto E es la unión disjunta de sus componentes conexas.

DEM Se basa en el hecho de que la unión de conexos no disjuntos es conexo (Ejercicio)

Ejercicio Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es un abierto, entonces toda componente conexa de Ω es abierta. Ω se puede escribir como la unión disjunta de sus componentes conexas abiertas.

Dem Sea $A \subseteq \Omega$ A componente conexa

Sea $a \in A$ $\exists r > 0$ con $D(a,r) \subseteq \Omega$

con $D(a,r)$ abierto y conexo y $A \cap D(a,r) \neq \emptyset$

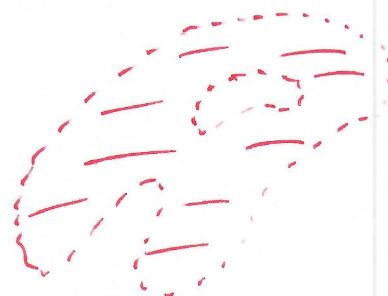
luego $A \cup D(a,r)$ es un conexo, por def de componente conexa $D(a,r) \subseteq A$.

Así A es abierto

Def Llamaremos región de $\mathbb{C}$ a todo subconjunto Ω no vacío, abierto y conexo

Ejemplo

Bueno: abierto convexo



Malo: abierto, conexo "con agujero".

Caminos en $\mathbb{C}$ (curvas paramétricas)

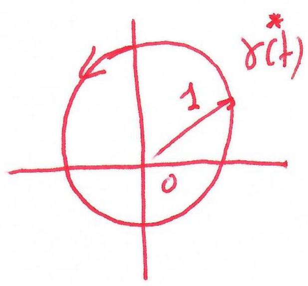
Sabemos que una curva paramétrica en $\mathbb{R}^2$ es una aplicación continua

$$\gamma\ [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$$

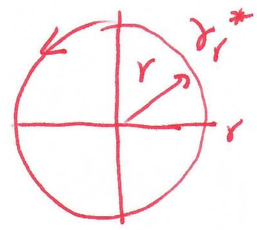
que asimilamos a su imagen $\gamma([a,b]) = \gamma^*$

Ejemplo

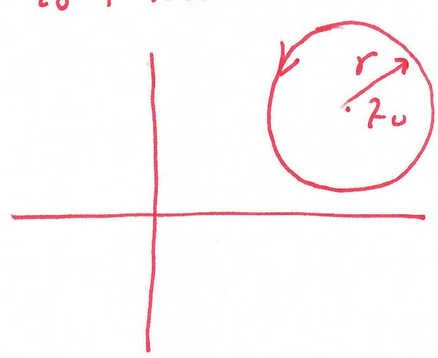
$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) = \cos t + i \operatorname{sen} t \quad t \in [0, 2\pi].$$



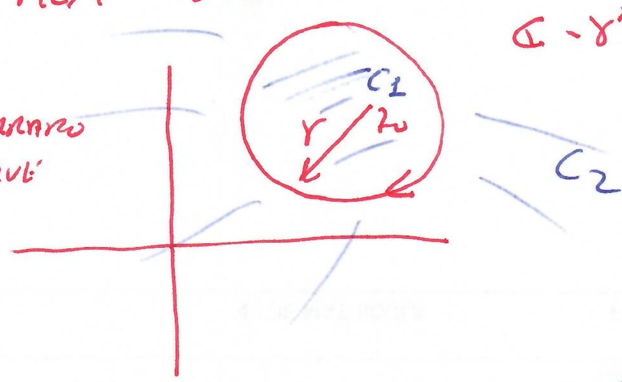
$$\gamma_r(t) = r\cos t + i r \operatorname{sen} t \quad t \in [0, 2\pi]$$



$$\gamma(t) = z_0 + r\cos t + i r \operatorname{sen} t \quad t \in [0, 2\pi]$$



$$\gamma(t) = z_0 + r\cos t - i r \operatorname{sen} t$$



$\mathbb{C} - \gamma^* = C_1 \cup C_2$

Observación Si γ es una curva paramétrica, γ^* es cerrado y $\mathbb{C} - \gamma^*$ es un abierto que puede tener distintas componentes conexas

Def Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ se dice conexo por caminos si $\forall z_1, z_2 \in A$ $\exists \gamma\ [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow A$ continua con $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$ y $\gamma^* = \gamma([a,b]) \subseteq A$.

Ejemplos los de arriba por ser conjuntos convexos

SABEMOS QUE:

PROP $A \subseteq \mathbb{C}$ CONEXO POR CAMINOS ES CONEXO

DEM SEA $a \in A$ Y $\forall z \in A$ SEA $\gamma_z\, [0,1] \longrightarrow A$ CURVA PARAMÉTRICA CONTINUA QUE UNE a CON z Y TAL QUE $\gamma_z([0,1]) = \gamma_z^* \subseteq A$

ASÍ $A = \bigcup_{z \in A} \gamma_z([0,1])$. UNIÓN DE CONEXOS.

($\gamma_z([0,1])$ ES CONEXO POR SER LA IMAGEN CONTINUA DEL CONEXO $[0,1]$) NO DISJUNTA, POR TANTO A ES UN CONEXO.

OBSERVACIÓN: SI $A \subseteq \mathbb{C}$ ES CONVEXO, ENTONCES ES CONEXO POR CAMINOS.

CAMINOS Y CICLOS. (LOS SIGUIENTES CONCEPTOS SON ÚTILES EN INTEGRACIÓN).

DEF SEA $\gamma\, [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ UNA CURVA CONTINUA Y SEA $\gamma^* = \gamma([a,b])$ SU IMAGEN

a) SE DICE QUE γ ES UN CAMINO SI ES DIFERENCIABLE A TROZOS, ES DECIR $\exists\, P$ PARTICIÓN DE $[a,b]$ ($P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n = b\}$.) TAL QUE $\forall i = 0, 1, \dots, n-1$ SE TIENE QUE $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ ES DERIVABLE

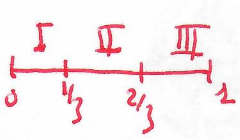
b) SE DICE QUE UN CAMINO γ ES CERRADO SI $\gamma(a) = \gamma(b)$.

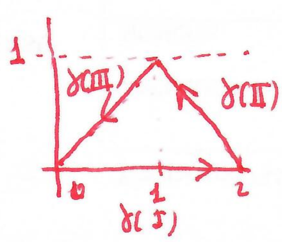
c) SE LLAMA CICLO Γ A UN CONJUNTO FINITO DE CAMINOS CERRADOS.

$$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n\}$$

Y $$\Gamma^* \overset{def}{=} |\gamma_1^*, \gamma_2^* \dots \gamma_n^*|$$

EJEMPLOS





CAMINO CERRADO

$$\gamma\, [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longrightarrow \gamma(t) = \begin{cases} 6t & t \in [0, 1/3] \\ 3-3t + i(3t-1) & t \in [1/3, 2/3] \\ 3-3t + i(3-3t) & t \in [2/3, 1] \end{cases}$$