FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

NUESTRO OBJETIVO ES ESTUDIAR FUNCIONES

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z = x + yi \longrightarrow f(z) = f(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x,y)i =$$
$$\underset{not}{=} u(x,y) + v(x,y)i \quad \left(\begin{array}{l} u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \end{array} \right)$$

DONDE $\mathrm{Re} f = u$ y $\mathrm{Im} f = v$

UNA FUNCIÓN DE ESTE TIPO $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, PUEDE VERSE COMO UNA FUNCIÓN $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

ASÍ LA CONTINUIDAD DE f

PROP $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ES CONTINUA SI Y SOLO SI u y v SON FUNCIONES CONTINUAS.

O LA DIFERENCIABILIDAD DE f

PROP $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ES DIFERENCIABLE SI Y SOLO SI u y v LO SON.

SON ASPECTOS QUE YA CONOCEMOS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

OBSERVACIÓN LAS PROPIEDADES PROPIAS DE $\mathbb{C}$, EN RELACIÓN A $\mathbb{R}^2$, PERMITE TENER EN CUENTA OTRAS PROPIEDADES QUE NO APARECEN DE UNA FUNCIÓN $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ EN EL CASO REAL $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

DEFINICIÓN: $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ES CONTINUA EN $z_0 \in \Omega$ SI $\forall R > 0 \ \exists r > 0$ TAL QUE $f(D(z_0, r)) \subseteq D(f(z_0), R)$

O EQUIVALENTEMENTE

a) $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ [ESTOS LÍMITES SON LOS VISTOS PARA FUNCIONES $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$]

b) $\forall (z_n) \to z_0 \implies \lim_{n \to \infty} f(z_n) = f(z_0)$.

OBSERVACIÓN: LOS LÍMITES SON PROPIEDADES, LA CONTINUIDAD RESPECTO A LAS OPERACIONES Y LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES, SON LAS QUE YA CONOCEMOS.

Funciones holomorfas

Históricamente las funciones de variable compleja se abordaron con tres enfoques distintos.

① **Funciones holomorfas** ($\approx$ 1820 Cauchy)

Como $\mathbb{C}$ es un cuerpo tiene sentido definir para $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, la derivada de f en a $f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$, siempre que este límite exista.

② **Funciones analíticas** ($\approx$ 1880 Weierstrass)

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \to f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \forall z \in D(a,R)$$

Una función dada una "serie de potencias"

③ **Funciones conformes** ($\approx$ 1850 Riemann)

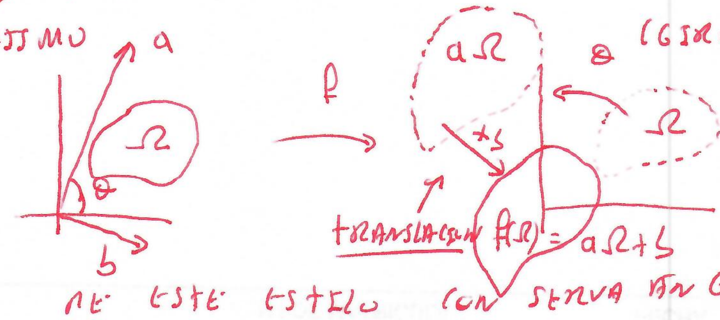
$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es conforme si conserva ángulos.

Observación Sea $f(z) = az+b$, $a,b \in \mathbb{C}$

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una transformación del plano en sí mismo (giro / homotecia)

Veremos que en $\mathbb{C}$ ①, ② y ③ son realmente equivalentes.

- $f(z) = az+b$



Una función de este estilo conserva ángulos

- Sea $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, derivable en a

$\Rightarrow \lim_{z\to a} \frac{g(z)-g(a)}{z-a} = g'(a) \iff \lim_{z\to a} \frac{g(z) - \{g'(a)(z-a)+g(a)\}}{z-a} = 0$

$\Rightarrow g(z) \approx h(z) = g'(a)(z-a)+g(a)$ conserva ángulo.

- Si $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tiene derivadas en a de todos los órdenes.

¿ $g(z) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ serie de Taylor?

FUNCIONES HOLOMORFAS

SEA $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ UNA FUNCIÓN DE VARIABLE COMPLEJA.

DEFINICIÓN: SE DICE QUE f TIENE DERIVADA EN UN PUNTO $z_0 \in \Omega$, SI EXISTE

$$(*) \quad \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \overset{\text{not}}{=} f'(z_0) \in \mathbb{C}$$

SI EXISTE $f'(z_0)$ $\forall z_0 \in \Omega$ SE DICE QUE f ES HOLOMORFA (Ó ANALÍTICA Ó DERIVABLE) EN TODO Ω Y SE DENOTA POR $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

SI $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ SE DICE QUE f ES ENTERA

OBSERV $(*) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : z \in D(z_0, \delta) - \{z_0\}$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

PROPOSICIÓN: SEAN $f, h: \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ Y SEA $z_0 \in \Omega$

1.) SI f ES DERIVABLE EN $z_0 \Rightarrow f$ ES CONTINUA EN z_0

2.) SI f Y h SON DERIVABLES EN z_0, ENTONCES

a) $\exists (f+h)'(z_0) = f'(z_0) + h'(z_0)$.

b) $\exists (f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) g(z_0) + f(z_0) g'(z_0)$

EN PARTICULAR SI $a \in \mathbb{C}$ $(af)'(z_0) = a f'(z_0)$

c) SI $h'(z_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \left(\frac{1}{h}(z)\right)' = \dfrac{-h'(z_0)}{h^2(z_0)}$

DEM 1.) $|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f'(z_0)(z - z_0) - f(z_0)| + |f'(z_0)(z - z_0)| \leq$

$$\leq \left| \frac{f(z) - [f'(z_0)(z - z_0) + f(z_0)]}{z - z_0} \right| |z - z_0| + |f'(z_0)| |z - z_0| \xrightarrow[z \to z_0]{} 0$$

LUEGO $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

2.) SI $f \equiv$ cte ó $g(z) = z$ ES OBVIO QUE $f' \equiv 0$ Y $g' \equiv 1$

DE LA MISMA FORMA QUE EN EL CASO DE VARIABLE REAL. SE PRUEBAN a) b) Y c)

REGLA DE LA CADENA

TEOREMA Si $f \in H(\Omega)$ y $f(\Omega) \subseteq \Omega_1$ con $g \in H(\Omega_1)$

entonces $h = g \circ f \in H(\Omega)$ y se tiene que

$\forall z_0 \in \Omega$ $\quad h'(z_0) = (g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0)$

DEM Como en es caso de variable real

Sea $G \; D(0, \delta) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$w \longrightarrow G(w) = \begin{cases} \dfrac{g(f(z_0+w)) - g(f(z_0))}{f(z_0+w) - f(z_0)} & \text{si } f(z_0+w) - f(z_0) \neq 0 \\ g'(f(z_0)) & \text{si } f(z_0+w) - f(z_0) = 0 \end{cases}$$

G es una función bien definida, que es continua en $w = 0$ ya que g es derivable en $f(z_0)$, así

$$\lim_{w \to 0} \frac{g(f(z_0)+w) - g(f(z_0))}{w} = g'(f(z_0))$$

Así $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta' > 0$ tal que $\forall w \in D(0, \delta')$

$$\left| \frac{g(f(z_0)+w) - g(f(z_0))}{w} - g'(f(z_0)) \right| < \varepsilon$$

Como f es derivable en z_0, f es continua en z_0, de modo que $\exists \delta > 0$ tal que si $t \in D(0, \delta)$

entonces $|f(z_0+t) - f(z_0)| < \delta'$

Así si $t \in D(0, \delta)$ y si $w = f(z_0+t) - f(z_0) \neq 0$, y entonces

entonces $w \in D(0, \delta') - \{0\}$

$$G(t) = \frac{g(f(z_0+t)) - g(f(z_0))}{f(z_0+t) - f(z_0)} = \frac{g(f(z_0)+w) - g(f(z_0))}{w}$$

y como $|w| = |f(z_0+t) - f(z_0)| < \delta'$ se sigue que

$$|G(t) - g'(f(z_0))| < \varepsilon \qquad \forall t \in D(0, \delta)$$

Por otro lado si $f(z_0+t) - f(z_0) = 0$ $\quad G(t) = g'(f(z_0))$.

Luego $|G(t) - g'(f(z_0))| < \varepsilon$ $\quad \forall t \in D(0, \delta)$ así $\lim_{t \to 0} G(t) = g'(f(z_0))$

PARA FINALIZAR

SI $t \neq 0$ $\dfrac{g(f(z_0+t)) - g(f(z_0))}{t} =$

$$= G(t) \, \frac{f(z_0+t) - f(z_0)}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

POR SER G CONTINUA EN $\boxed{t=0}$ Y f DERIVABLE EN z_0.

EJEMPLOS $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$

$$f'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + 2a_2 z + a_1.$$

YA QUE $f \equiv ct \Rightarrow f' \equiv 0$

$f(z) = z^n \Rightarrow f'(z) = n z^{n-1}$

(UTILIZAR INDUCCIÓN)

TAMBIÉN $f(z) = \dfrac{1}{z^n}$ $n \geq 1 \Rightarrow f'(z) = \dfrac{-n}{z^{n+1}}$.