CONDICIONES DE CAUCHY - RIEMANN

SEA $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longrightarrow f(z) = u(z) + i v(z)$, Ω ABIERTO. Y $z_0 \in \Omega$.

¿QUE RELACIÓN EXISTE, SI LA HAY, ENTRE SER DIFERENCIABLE EN z_0 Y DERIVABLE U HOLOMORFA EN z_0?

f DIFERENCIABLE EN z_0 SI Y SOLO SI

$$\exists\, Df(z_0) = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix} \quad \text{TAL QUE}$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ CON $\forall z \in D(z_0, r) \Rightarrow$

$$\| f(z) - f(z_0) - Df(z_0)(z - z_0) \| \leq \varepsilon \| z - z_0 \|$$

PRODUCTO DE MATRICES.

PROPOSICIÓN SEA $z_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$, Ω ABIERTO Y $f: \Omega \to \mathbb{C}$, $z \to f(z) = u(z) + i v(z)$. SON EQUIVALENTES.

i) f ES DERIVABLE EN z_0

ii) f ES DIFERENCIABLE EN z_0 Y SE VERIFICAN LAS ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN.

$$u_x(z_0) = v_y(z_0)$$
$$u_y(z_0) = -v_x(z_0)$$

$$\left[\ \text{Y ASÍ} \quad f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\right.$$

$$\left. \text{Y} \quad Df(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} \ \right]$$

__DEM__ __LEMA__ SI $z_0 = a + bi$ Y $z = x + yi$ EN $\mathbb{C}$

ENTONCES $z_0 \cdot z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

PRODUCTO COMPLEJO

PRODUCTO DE MATRICES.

DEMOSTRACIÓN

a) $\Rightarrow$ b)

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \iff$$

$$0 = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} =$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix} (z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

$$\iff \lim_{z \to z_0} \left\| \frac{f(z) - f(z_0) - \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} (z - z_0)}{\| z - z_0 \|} \right\| = 0$$

ASÍ f ES DIFERENCIABLE EN z_0 Y

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix}$$

AHORA (PARA AHORRARNOS LO QUE SIGUE HEMOS VISTO QUE f ES DIFERENCIABLE LUEGO $Df(z) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ Y ASÍ VEMOS QUE $\begin{cases} u_x = u_y \\ -u_y = v_x \end{cases}$ c.q.d.)

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \, \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h}$$

ASÍ $\operatorname{Re} f' = \frac{\partial u}{\partial x}$ Y $\operatorname{Im} f' = \frac{\partial v}{\partial x}$

DE LA MISMA FORMA

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + hi) - f(z_0)}{ih} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[-i \left[\frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{h} \right] + \frac{v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)}{h} \right]$$

$$= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = f'(z_0) = \operatorname{Re} f' + i \operatorname{Im} f'$$

DE LO QUE SE SIGUE CAUCHY-RIEMANN.

240

DEM

b) $\Rightarrow$ a)

$$0 = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} (z - z_0)}{\| z - z_0 \|} ;$$

$$\iff \quad 0 = \lim_{z \to z_0} \left\| \frac{f(z) - f(z_0) - Df(z_0)(z-z_0)}{\| z - z_0 \|} \right\| =$$

PRODUCTO DE COMPLEJOS

$$= \lim_{z \to z_0} \left\| \frac{f(z) - f(z_0) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot (z - z_0)}{z - z_0} \right\| = 0$$

ASI $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ c.q.d.

OBSERVACIÓN SI f ES DERIVABLE EN z_0

$\Rightarrow$ $\exists\, u_x, u_y, v_x$ y v_y EN z_0 Y VERIFICAN

$\not\Leftarrow$ LAS CONDICIONES DE CAUCHY - RIEMANN.

LA OTRA IMPLICACIÓN NO ES CIERTA

CONTRAEJEMPLO: $u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{SI } (x,y) = 0 \end{cases}$ $v(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$

DEM VEAMOS EL COMPORTAMIENTO DE u Y v EN $z = (0,0)$

$u_x(0,0) = 1 = v_y(0,0)$
$u_y(0,0) = -1 = -v_x(0,0)$

CONDICIONES DE CAUCHY RIEMANN EN $(0,0)$

$u_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(h,0) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1.$ etc.

SIN EMBARGO $f(z) = u(z) + v(z)i$ NO ES DIFERENCIABLE EN $z=0$ Y POR TANTO TAMPOCO DERIVABLE EN $z = 0$, YA QUE

SI $x = 0$, ASI $z = iy$

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{-iy - y}{iy} = -\frac{i-1}{i}$$

SI $x = y$

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{xi}{x + xi} = \frac{i}{1+i}$$

ESTOS NÚMEROS SON DISTINTOS.

PROP Sean $u, v : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z_0 \in \Omega$ (Ω abierto) tales que admiten derivadas parciales continuas y verifican las condiciones de Cauchy-Riemann en z_0, entonces $f(z) = u(z) + i v(z)$ es derivable en z_0 y:

$$\exists\, f'(z_0) = u_x(z_0) + i v_x(z_0)$$

DEM Derivadas parciales continuas $\Rightarrow$ diferenciable

OBSERVACIÓN Más adelante veremos que $f \in H(\Omega)$ $\Rightarrow$ $u, v \in C^{\infty}(\Omega)$ lo que da la vuelta a la proposición

EJEMPLO $f(z) = \bar{z}$ no es derivable

DEM $f(z) = \bar{z} \iff f(x, y) = x - yi$, $z = x + yi$

$u(x, y) = x$
$v(x, y) = -y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

no se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann

Suponiendo cierto que $f \in H(\Omega) \Rightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in C^{\infty}(\Omega)$. (Algo que veremos al probar la fórmula integral de Cauchy) se puede probar un teorema de la función inversa

TEOREMA (DE LA FUNCIÓN INVERSA) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $w_0 \in \Omega$ y $g \in H(\Omega)$ con $g'(w_0) \neq 0$, entonces existen entornos abiertos $V(w_0)$ y $V(z_0)$ de w_0 y de $z_0 = g(w_0)$ respectivamente, de forma que:

a) $g : V(w_0) \longrightarrow V(z_0)$ es biyectiva y $g'(w) \neq 0$ $\forall w \in V(w_0)$

b) La función inversa $g^{-1} \equiv f : V(z_0) \longrightarrow V(w_0)$ verifica que $g^{-1} \in H(V(z_0))$ y $(g^{-1})'(z) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(z))}$ $\forall z \in V(z_0)$.

26

DEM. Si $g'(w_0) \neq 0$, entonces por las desigualdades de Cauchy-Riemann

$$|Dg(w_0)| = \begin{vmatrix} u_x(w_0) & u_y(w_0) \\ v_x(w_0) & v_y(w_0) \end{vmatrix} = u_x^2(w_0) + u_y^2(w_0) =$$
$$= v_y^2(w_0) + v_x^2(w_0) \neq 0$$

Luego por se puede aplicar el teorema de la función inversa $g\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (se supone que $g = u + vi \in C^1(\Omega)$) y así existen entornos $V(w_0)$ y $V(z_0)$ con

$$g^{-1}(V(z_0)) \longrightarrow V(w_0) \quad \text{biyectiva}$$

con $g^{-1} \in C^1(V(z_0))$. Así g^{-1} es diferenciable

y como $Dg^{-1}(z) = \left[(Dg)(g^{-1}(z))\right]^{-1}$

$\left(\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{|A|} & \frac{b}{|A|} \\ \frac{-b}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{pmatrix} \right)$

Luego g^{-1} verifica las condiciones de Cauchy-Riemann, por tanto $g^{-1} \in H(V(z))$.

y además $g^{-1} \circ g(w) = w$

$$\Leftrightarrow \quad (g^{-1} \circ g)'(w) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (g^{-1})'(g(w))\, g'(w) = 1$$

regla de la cadena

y así $(g^{-1})'(z) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(z))}$ c.q.d.