FUNCIONES CONFORMES

Ejemplo

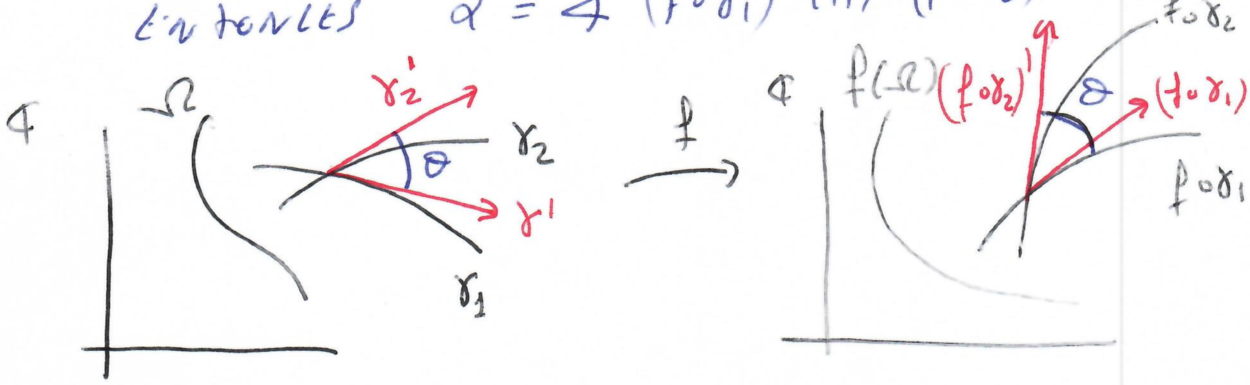
$z \longrightarrow f(z) = z^3$

DEF: Sea $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Se dice que f es conforme en Ω si f es diferenciable con $Df(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$ $^{(*)}$ y es tal que para todo par de curvas paramétricas derivables

$$\gamma_1, \gamma_2 \ [a, b] \longrightarrow \Omega$$

con $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ y con $\alpha = \measuredangle\, \gamma_1'(t_1) \gamma_2'(t_2)$

entonces $\alpha = \measuredangle\, (f \circ \gamma_1)'(t_1) (f \circ \gamma_2)'(t_2)$



OBSERVACIÓN: Riemann buscaba transformaciones del plano en sí mismo que no modificasen ángulos de curvas que se cortan. (Esto se debía a consideraciones físicas de transformar un problema en Ω en otro en $f(\Omega)$, quizás más sencillo (pensar en el problema de Dirichlet), sin modificar la "geometría interna" del problema.

¿Cómo son las funciones conformes? Veamos que esencialmente son las funciones holomorfas.

$$(*)\ Df(z) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

$f = u + vi$

$\overline{\overline{\downarrow}}$ Si f es holomorfa y por tanto satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

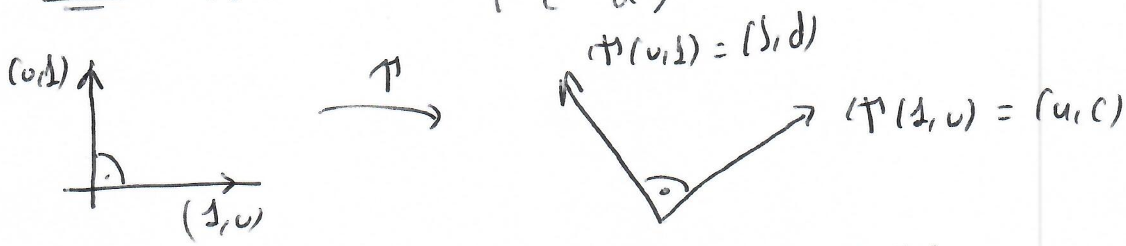
LEMA Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicación lineal que conserva ángulos (e.d. $\measuredangle\, Tx\, Ty = \measuredangle\, x, y$ incluyendo la orientación). Entonces $\exists\, \lambda \in (0, \infty)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$M T = \lambda \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Matriz de determinante 1 (espacio euclídeo)

(Es decir T es un giro junto con una homotecia)

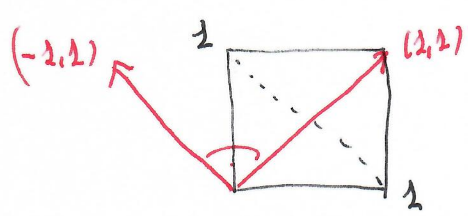
Dem Sea $MT = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.



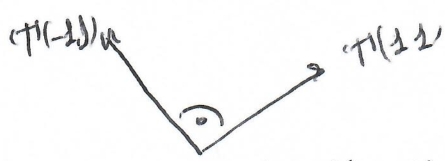
Como $(1,0)$ y $(0,1)$ son ortogonales también lo son $T(1,0)$ y $T(0,1)$

Así $(b, d) = \gamma(-c, a)$ $\gamma > 0$ (para guardar la orientación)

$$MT = \begin{pmatrix} a & -\gamma c \\ c & \gamma a \end{pmatrix}$$



Las diagonales del cuadrado son ortogonales así



$$0 = \langle T(1,1), T(-1,1) \rangle = \langle (a-\gamma c, c+\gamma a), (-a-\gamma c, -c+\gamma a) \rangle$$

$$= -[(a-\gamma c)(-a-\gamma c)] + [(c+\gamma a)(-c+\gamma a)] =$$

$$= -[a^2 - \gamma^2 c^2] + \gamma^2 a^2 - c^2 = -[a^2+c^2] + \gamma^2[a^2+c^2]$$

$$\Rightarrow \gamma = 1$$

LUEGO $M_T = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+c^2}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} & \frac{-c}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} \end{pmatrix}$

EXISTE $\theta \in [0, 2\pi)$ TAL QUE

$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$

CON $\operatorname{sen}\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$

LUEGO $M_T = \sqrt{a^2+c^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

$(*)$

OBSERVACIÓN

•) SI $z \in \mathbb{C}$ $M_T z = e^{\lg(\sqrt{a^2+c^2}) + i\theta} z$.

••) SI $M_T = \lambda \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ $\lambda > 0$, CONSERVA ÁNGULO ENTONCES $(M_T)^{-1}$ TAMBIÉN CONSERVA ÁNGULO.

OBSERVACIÓN: •) SI $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ES LINEAL Y CONSERVA ÁNGULO, SU DIFERENCIAL $DT = M_T$ QUE POR TANTO SATISFACE LAS ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

••) DE FORMA GENERAL SI $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ES DIFERENCIABLE Y CONSERVA ÁNGULO ENTONCES

$\measuredangle (f\circ\gamma_1)'(t_1)\,(f\circ\gamma_2)'(t_2) = \measuredangle\, \gamma_1'(t_1)\,\gamma_2'(t_2)$

$\measuredangle\, Df(z_0)\gamma_1'(t_1) \cdot Df(z_0)\gamma_2'(t_2) = \measuredangle\, \gamma_1'(t_1)\cdot\gamma_2'(t_2)$

CON $z_0 = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$.

COMO $Df(z_0)$ ES LINEAL (LA DIFERENCIAL DE f EN z_0), LUEGO SATISFACE TIENE QUE VERIFICAR $(*)$, LAS CONDICIONES DE CAUCHY-RIEMANN. ASÍ f ES DERIVABLE EN z_0 (EL RECÍPROCO ES OBVIO SIEMPRE QUE $f'(z_0) \neq 0$).

TEOREMA Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y sea

$$f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longrightarrow f(z) = u(z) + v(z)i = u(x,y) + v(x,y)i$$

Son equivalentes

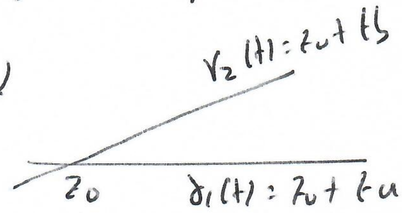
a) f es derivable en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$

b) f es diferenciable en z_0 con $Df(z_0) \neq 0$ y se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ (en z_0)

c) f es diferenciable en z_0, $Df(z_0) \neq 0$ y $Df(z_0)$ conserva ángulos y direcciones.

DEM a $\Leftrightarrow$ b ya lo hemos visto

a) $\Rightarrow$ c)



$a, b \in \mathbb{R}^2$

$$\measuredangle (f \circ \gamma_2)'(0)\, (f \circ \gamma_1')(0) =$$
$$= \measuredangle f'(z_0)b\ f'(z_0)a =$$

regla de la cadena y lema hoja 22:

$f'(z_0) = |f'(z_0)| e^{i \arg f'(z_0)}$ giro y homotecia

$Df(z_0)b = f'(z_0) \cdot b$

$$= \measuredangle Df(z_0)b\ Df(z_0)a = \measuredangle ba$$

o también Df_{z_0} satisface las condiciones de Cauchy-Riemann, por el lema anterior es un giro junto a una homotecia

c) $\Rightarrow$ b) $Df(z_0)$ es una transformación lineal que conserva ángulos, por el lema anterior satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

FUNCIONES ARMÓNICAS

DEF a) UNA FUNCIÓN $u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ES ARMÓNICA EN Ω SI EXISTEN $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ Y $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (Ó u_{xx} y u_{yy}) DE MODO QUE $\Delta u \overset{DEF}{=} u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(EL LAPLACIANO DE u ES NULO SOBRE Ω).

b) SE DICEN QUE $u, v: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ FORMAN UN PAR ARMÓNICO CONJUGADO EN Ω SI u Y v SON ARMÓNICAS Y VERIFICAN LAS ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

OBSERVACIÓN SI $f \in H(\Omega)$ CON $f = u + vi$ ENTONCES u Y v SON UN PAR ARMÓNICO CONJUGADO

USANDO QUE SI $f \in H(\Omega) \Rightarrow u, v \in C^\infty(\Omega)$. ESTO LO VEREMOS MAS ADELANTE

DEM $u_x = v_y \Rightarrow u_{xx} = v_{yx}$

$u_y = -v_x \Rightarrow u_{yy} = -v_{xy} = -v_{yx}$
T. Schwarz

ASÍ $u_{xx} + u_{yy} = 0$; LO MISMO PARA v

PROPOSICIÓN SEA $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ABIERTO Y $u, v: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ $u, v \in C^2(\Omega)$ SON EQUIVALENTES.

1) $f = u + iv \in H(\Omega)$.

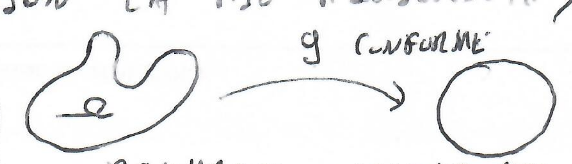
2) u, v FORMAN UN PAR ARMÓNICO CONJUGADO

OBSERVACIÓN PARA $u \in C^2(\Omega)$, CON $\Delta u = 0$, SE PUEDE CONSTRUIR SU ARMÓNICA CONJUGADA v (VER EJERCICIOS) Y ASÍ LA FUNCIÓN HOLOMORFA $f = u + iv$.

OBSERVACIÓN TODO LO ANTERIOR TIENE QUE VER CON EL PROBLEMA DE LA FÍSICA $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial D(0,1)} = f(e^{i\theta}) \end{cases}$

CUYA SOLUCIÓN LA DIO DIRICHLETE; PARA RESOLVER

$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$



$g(\Omega) = D(0,1)$ Y $g(\partial\Omega) = \partial D(0,1)$

RIEMANN NECESITA LAS FUNCIONES CONFORMES.