SERIES DE POTENCIAS

SEA $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ UNA SERIE DE NÚMEROS COMPLEJOS

DEF $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ CONVERGE A z SI $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0 : N \geq N_0$

$$\left| \sum_{n=1}^{N} z_n - z \right| < \varepsilon.$$

PROP SI $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ES UNA SERIE DE NÚMEROS COMPLEJOS CON $z_n = x_n + y_n i$, ENTONCES SON EQUIVALENTES

a) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ CONVERGE A $z = x + iy$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$

DEM a)⇒b) $\left| \sum_{n=1}^{N} x_n - x \right| \leq \left| Re \left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n - z \right) \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{N} z_n - z \right|$

Ejercicio

y $\left| \sum_{n=1}^{N} y_n - y \right| \leq \left| Im \left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n - z \right) \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n - z \right|$.

ASÍ SI $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z \Rightarrow \sum x_n = x$ y $\sum y_n = y$.

b)⇒a) POR OTRO LADO

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n - z \right| = \sqrt{\left(Re \left(\sum_{n=1}^{N} z_n - z \right) \right)^2 + \left(Im \left(\sum_{n=1}^{N} z_n - z \right) \right)^2} \leq$$

$$\leq 2 \max \left\{ \left| Re \left(\sum_{n=1}^{N} z_n - z \right) \right|, \left| Im \left(\sum_{n=1}^{N} z_n - z \right) \right| \right\} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

DEF UNA SERIE DE NÚMEROS COMPLEJOS $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE SI $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ ES CONVERGENTE

PROP SI $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE, ENTONCES ES CONVERGENTE

DEM $\sum |Re\, z_n| \leq \sum |z_n|$ y $\sum |Im\, z_n| \leq \sum |z_n|$ ASÍ $\sum Re\, z_n$ y $\sum Im\, z_n$ SON ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE y POR TANTO CONVERGENTES. y SE APLICA LA PROP ANTERIOR.

Ejercicio Prop. SI $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ES CONVERGENTE, ENTONCES $\lim_{n \to \infty} z_n = 0$

RADIO DE CONVERGENCIA

TEOREMA (PRUEBA M-WEIERSTRASS).

SEA $\{f_n\}$ UNA SUCESIÓN DE FUNCIONES DEFINIDAS SOBRE $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ (ó $\mathbb{R}$); SUPONGAMOS QUE $\exists \{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$ SUCESIÓN DE NÚMEROS POSITIVOS, TALES QUE

$$|f_n(z)| \leq M_n \quad \forall z \in \Omega.$$

Y TAL QUE $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ ES CONVERGENTE. ENTONCES $\forall z \in \Omega$ LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE, ES MÁS LA SERIE DE FUNCIONES CONVERGE UNIFORMEMENTE EN Ω.

DEM $\forall z \in \Omega$ $\exists \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ YA QUE $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$.

SEA $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ $\forall z \in \Omega$, ASÍ

$$\left| f(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

LO QUE PRUEBA LA CONVERGENCIA UNIFORME

($\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0$: $N \geq N_0$ $\sum_{n>N}^{\infty} M_n < \varepsilon$, ASÍ

$\forall N \geq N_0$ $\left| f(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z) \right| < \varepsilon$ $\forall z \in \Omega$).

TEOREMA SEA UNA <u>SERIE DE POTENCIAS</u> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$. CON $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$ TAL QUE CONVERGE PARA ALGÚN $z = z_1$

($f_n(z) := a_n (z-z_0)^n$; CON ESTAS FUNCIONES CONSTRUIMOS LA SERIE DE FUNCIONES $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$)

ENTONCES $\forall z$ CON $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$ LA SERIE CONVERGE ABSOLUTAMENTE EN z Y $\forall r > 0$ CON $r < |z_1 - z_0|$. LA SERIE DE FUNCIONES $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ CONVERGE UNIFORMEMENTE. DE FUNCIONES

LO MISMO LE OCURRE A LA SERIE DE FUNCIONES $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$.

DEM Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$ es convergente, entonces

$$|a_n (z_1 - z_0)^n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

(En otro caso o bien $\operatorname{Re} a_n (z_1 - z_0)^n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ ó bien $\operatorname{Im} a_n (z_1 - z_0)^n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ y así la parte real ó la imaginaria de la serie no convergería)

Luego $\exists M > 0$ con $|a_n (z_1 - z_0)^n| \leq M \quad \forall n = 0, 1, 2 \ldots$

Si $|z - z_0| \leq r < |z_1 - z_0|$, entonces

$$|a_n (z - z_0)^n| = |a_n| |z - z_0|^n = |a_n| |z_1 - z_0|^n \frac{|z - z_0|^n}{|z_1 - z_0|^n} \leq$$

$$\leq M \left| \frac{r}{z_1 - z_0} \right|^n \quad \text{como} \quad \frac{r}{|z_1 - z_0|} < 1$$

tomando $M_n = \left(\frac{r}{|z_1 - z_0|} \right)^n$, la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{z_1 - z_0} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{r}{|z_1 - z_0|}},$$

por la prueba M-Weierst. se sigue que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge uniformemente en $\overline{D(z_0, r)}$.

Por otro lado si $|z - z_0| \leq r < |z_1 - z_0|$

$$\left| n a_n (z - z_0)^{n-1} \right| \leq \frac{n}{|z - z_0|} \left| a_n \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n} \right| |z_1 - z_0|^n \leq$$

$$\leq \frac{n}{|z - z_0|} M \cdot \frac{r^n}{|z_1 - z_0|^n} \qquad \left| \frac{r}{|z_1 - z_0|} \right| < 1$$

Se $N = \frac{M}{|z - z_0|}$ constante y sea $\rho = \frac{r}{|z_1 - z_0|} < 1$

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} N n \rho^n$ es convergente ya que $\lim_{n \to \infty} \frac{N (n+1) \rho^{n+1}}{N n \rho^n} = \rho < 1$.

Por el criterio del cociente.

Hay convergencia para $|z - z_0| < r < |z_1 - z_0|$.

En particular $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ converge en $D(z_0, r)$) como es una serie de potencias la primera parte de la prueba demuestra que $\sum n a_n (z - z_0)^{n-1}$ converge uniformemente en $D(z_0, r)$ con $r < |z_1 - z_0|$. #

Ced

DEFINICIÓN Para una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ (35°)

se llama radio de convergencia R de la serie al número real

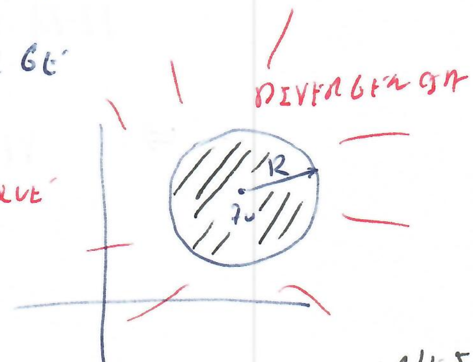
$$R=\sup\left\{|z_1-z_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n \text{ es convergente}\right\}\geq 0$$

PROPOSICIÓN Sea R el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

A) Si $R=0$ la serie sólo converge para $z=0$

B) Si $0<R\leq\infty$, entonces $\forall\, 0<r<R$, la serie converge absolutamente y uniformemente en todo $D(z_0,r)$

C) Si $0<R<\infty$, entonces $\forall\, z_1$ con $|z_1-z_0|>R$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ diverge



OBSERVACIÓN A priori no sabemos qué ocurre en $\partial D(z_0,R)$

En nuestro caso de series de potencias de nº complejos, sabemos que de existir convergencia es absoluta, así tomando módulos podemos utilizar los criterios de convergencia de series reales positivas

CRITERIO DE CONVERGENCIA (DE CAUCHY-HADAMARD).
Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ A) Si existe $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ entonces R el radio de convergencia es $R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$

B) Si $\exists \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

DEM A) Por el criterio del cociente $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||z-z_0|^{n+1}}{|a_n||z-z_0|^n}$
$=|z-z_0|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<1$ hay convergencia $\Rightarrow$ (>1 ($\Rightarrow$ divergencia))
$|z-z_0|<\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=R$ por def de radio de convergencia

EJEMPLOS $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}(-1)^n}{2n!}$, $\operatorname{sen} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n$

Como se vio en 1º curso el radio de convergencia es ∞ en estos tres casos

Ver detrás observación:

DEF SEA $f_n\ \Omega \subseteq \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R} \cup \mathbb{C})$ $n \in \mathbb{N}$
UNA SUCESIÓN DE FUNCIONES.

A) DECIMOS QUE $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ CONVERGE PUNTUALMENTE A OTRA FUNCIÓN $f\ \Omega \subseteq \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ SI

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{K}$$

EN PARTICULAR $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$

B) DECIMOS QUE $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE A OTRA FUNCIÓN $f\ \Omega \subseteq \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ SOBRE $A \subseteq \Omega$ SI $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ TAL QUE SI $n \geq n_0$ ENTONCES $|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon$ $\forall z \in A$

EN PARTICULAR $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ UNIFORMEMENTE

PROPIEDADES SEA $f_n \longrightarrow f$ UNIFORMEMENTE SOBRE $A \subseteq \Omega$

A) ENTONCES $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ PUNTUALMENTE PARA TODO $x \in A$

Ejercicio B) SI A ES COMPACTO Y CADA f_n ES CONTINUA SOBRE A, ENTONCES f ES CONTINUA EN TODO A

DEM COMO LAS VISTAS EN 1º CURSO

A) TRIVIAL

B) SEA $x_0 \in A$ Y SEA $\varepsilon > 0$
$\exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow |f(y) - f_n(y)| < \varepsilon/3$ $\forall y \in A$
SEA $f_{n_0}\ A \subseteq \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ f_n CONTINUA SOBRE A COMPACTO, ES UNIFORMEMENTE CONTINUA Y ASÍ PARA $\varepsilon/3$ $\exists \delta > 0$ TAL QUE $\forall x, y \in A$ CON $|x - y| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \varepsilon/3$
SEA $y \in D(x_0, \delta/2)$ ASÍ $|f(x) - f(y)| \leq$
$\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3$

TEOREMA SEA UNA SERIE DE POTENCIAS $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ DE MODO QUE CONVERGE UNIFORMEMENTE EN $D(z_0,r)$ $R>r>0$. Y SEA $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ $z\in D(z_0,r)$ SU LÍMITE PUNTUAL.

A) f ES CONTINUA EN $D(z_0,r)$ $0<r<R$. (R RADIO DE CONVERGENCIA)

B) $f\in H(D(z_0,r))$ CON

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^n$$

CON CONVERGENCIA UNIFORME EN $D(z_0,r)$ $0<r<R$

C) f' SATISFACE LAS HIPÓTESIS DE f ASÍ EXISTEN $f'', f''', \dots f^{k)}$ $\forall k\in\mathbb{N}$

CON $$f^{k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\,a_n(z-z_0)^{n-k}$$

CON CONVERGENCIA UNIFORME EN $D(z_0,r)$ $0<r<R$

ADEMÁS $f^{k)}(z_0)=a_k k!$ ASÍ

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \quad \left(\text{SERIE DE TAYLOR}\right).$$

DEM SOLO HAY QUE PROBAR B)

VIMOS EN UN RESULTADO ANTERIOR QUE SI $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ CONVERGE EN $D(z_0,r)$ CON $0<r<R$, UNIFORMEMENTE TAMBIÉN LO HACE $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^n \overset{DEF}{=} g(z)$

VEAMOS QUE f' SE PUEDE ESCRIBIR COMO LA SERIE ANTERIOR.

SEA $w_0\in D(z_0,r)$ Y SEA $\delta>0$ CON $|z_0-w_0|<\delta<r$

SI $z\neq w_0$ TENEMOS QUE

$$\frac{f(z)-f(w_0)}{z-w_0}-g(w_0)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{(z-z_0)^n-(w_0-z_0)^n}{z-w_0}-n(w_0-z_0)^{n-1}\right]$$

$f(z)-f(w_0)$ CANCELA EL TÉRMINO INDEPENDIENTE

LA EXPRESIÓN $\left[\dfrac{(z-z_0)^n-(w_0-z_0)^n}{z-w_0} - n(w_0-z_0)^{n-1}\right]$ 38

ES 0 SI $n=1$

O BIEN $(z-w_0)\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k(w_0-z_0)^{k-1}(z-z_0)^{n-k-1}$

Ejercicio

USAMOS QUE $x^n-y^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+ \quad + xy^{n-2}+y^{n-1})$

VER HOJA 1 DE EJERCICIOS

ASÍ $\dfrac{(z-z_0)^n-(w_0-z_0)^n}{z-w_0} - n(w_0-z_0)^{n-1} =$

$= \dfrac{(z-\cancel{z_0})-(w_0-\cancel{z_0})}{z-w_0}\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (z-z_0)^{n-k}(w_0-z_0)^{k-1} - n(w_0-z_0)^{n-1}\right] =$

$= (z-z_0)^{n-1}+(z-z_0)^{n-2}(w_0-z_0)+\cdot \quad +(z-z_0)(w_0-z_0)^{n-2}+(1-n)(w_0-z_0)^{n-1}$ (*)

$= (z-w_0)\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k(w_0-z_0)^{k-1}(z-z_0)^{n-k-1}$

ESTA IGUALDAD SE TIENE DE

$(z-w_0)\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k(w_0-z_0)^{k-1}(z-z_0)^{n-k-1} =$

$=\left[(z-z_0)-(w_0-z_0)\right]\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k(w_0-z_0)^{k-1}(z-z_0)^{n-k-1} =$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k(w_0-z_0)^{k-1}(z-z_0)^{n-k} - \sum_{k=1}^{n-1} k(w_0-z_0)^{k}(z-z_0)^{n-k-1} =$

$= (z-z_0)^{n-1}+2(w_0-z_0)(z-z_0)^{n-2}+\cdot \quad +(n-2)(w_0-z_0)^{n-3}(z-z_0)^2+(n-1)(w_0-z_0)^{n-2}(z-z_0)$

(*) $-(w_0-z_0)(z-z_0)^{n-2} - \quad -(n-3)(w_0-z_0)^{n-3}(z-z_0)^2-(n-2)(w_0-z_0)^{n-2}(z-z_0)$

$-(n-1)(w_0-z_0)^{n-1}$

ASÍ SI $|z - z_0| < r$

SE TIENE QUE

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} k (w_0 - z_0)^{k-1}(z-z_0)^{n-k-1}\right| \le \sum_{k=1}^{n-1} k\, r^{k-1} r^{n-k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k\, r^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}$$

DERIVADA SEGUNDA CONVERGE EN EL MISMO SITIO QUE $\sum |a_n| r^n$.

$\le |z-w_0| \sum_{k=1}^{\infty} |a_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}$ (*)

Y POR TANTO

$$\left|\frac{f(z)-f(w_0)}{z-w_0} - g(w_0)\right| \le |z-w_0| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 r^{n-2}$$

$n=1$ SE ANULA COMO VIMOS

$\frac{n(n-1)}{2} \le n^2$

(*) SOBRA POR (*)

PUESTO QUE $\rho < r$ Y LA SERIE $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| r^{n-1}$ ES CONVERGENTE, TAMBIÉN LO ES $\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n| r^{n-2}$

(PRUEBA DE COCIENTE $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2 |a_{n+2}| r^n}{(n+1)^2 |a_{n+1}| r^{n-1}} = r \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+2}|}{|a_{n+1}|} < 1$)

$r < \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$ RADIO DE CONVERGENCIA

SUPONGAMOS QUE $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ EXISTE, EN OTRO CASO SE PUEDE HACER UNA PRUEBA COMO LA DE PÁG 34

LUEGO $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 r^{n-2}$ ES CONVERGENTE Y DA UNA FUNCIÓN CONTINUA, CUANDO $z \to w_0$

(*) VER DETRÁS

CONSTANTE

Y ASÍ $\left|\frac{f(z)-f(w_0)}{z-w_0} - g(w_0)\right| \le |z-w_0| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 r^{n-2} \to 0$

$z \to w_0$

$\rho \to 0$

LO QUE PRUEBA QUE

$$\exists f'(w_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(w_0)}{z-w_0} = g(w_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

EJEMPLOS

$(e^z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

$(\cos z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\, z^{2n-1}(-1)^n}{2n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}(-1)^n = -\operatorname{sen} z$

$(\operatorname{sen} z)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\, z^{2n}}{(2n+1)!}(-1)^n = \cos z$

COMO EN EL CASO REAL