FUNCIONES ANALÍTICAS:

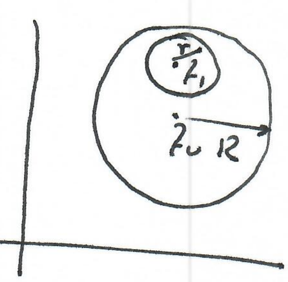
DEF Sea $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, Ω abierto, se dice que f es analítica en $z_0 \in \Omega$ si $\exists r>0$ y existe una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ tal que $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0,r)$

OBSERVACIÓN Si f es analítica en Ω. es continua y derivable en Ω (e.d $f \in H(\Omega)$)

OBSERVACIÓN La teoría de Cauchy nos dirá que toda función $f \in H(\Omega)$, es analítica en Ω

TEOREMA: Sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ una función dada por una serie de potencias. Entonces f es analítica en $D(z_0,R)$ donde R es el radio de convergencia de la serie

DEM Sea $z_1 \in D(z_0,R)$, y sea $r>0$ con $D(z_1,r) \subseteq D(z_0,R)$



$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_1+z_1-z_0)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(z-z_1)^k(z_1-z_0)^{n-k} \underset{[1]}{=}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\left[\sum_{n=k}^{\infty} a_n\binom{n}{k}(z_1-z_0)^{n-k}\right]}_{(*)}(z-z_1)^k=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_1)^k$$

$r < R-|z_1-z_0|$. Así
$|z-z_1|\,|z_1-z_0| <$
$< (R-|z_1-z_0|)(|z_1-z_0|)$

[1] Ver resultados sobre permutaciones de series dobles

$$(*)\quad \frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}}=\frac{\frac{(n+1)\cdots(n-k)}{k!}}{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}}=\frac{n+1}{n-k+1}\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Luego por el criterio del cociente, si $\exists \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, la serie anterior (*) también es convergente.

TEOREMAS DE IDENTIDAD

TEOREMA (DE IDENTIDAD 1) Sea Ω un abierto conexo y sea $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica, son equivalentes:

a) f es nula en Ω

b) f es nula en un abierto $\Omega_1 \subseteq \Omega$

c) Existe $z_0 \in \Omega$ con $f^{n)}(z_0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

DEM a $\Rightarrow$ b) trivial

b $\Rightarrow$ c) Si $f|_{\Omega_1} = 0$, sea $z_0 \in \Omega_1$

así $f'(z_1) = \lim_{z \to z_1} \dfrac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = 0 \quad \forall z_1 \in \Omega_1$, así $f'(z_0) = 0$ etc

c $\Rightarrow$ a) Sea $S = \{z \in \Omega : f^{n)}(z) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$

Como $z_0 \in S$, S no es vacío

S es cerrado
$$S = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{z \in \Omega : [f^{n)}]^{-1}\{0\}\}$$

Cada $f^{n)}$ es continua, luego la intersección de cerrados es cerrado

S es abierto $\forall z_1 \in S \quad \exists r > 0$ con $D(z_1, r) \subseteq \Omega$

tal que $\forall z \in D(z_1, r) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{n)}(z_1)}{n!} (z - z_1)^n \equiv 0$

Luego $D(z_1, r) \subseteq S$

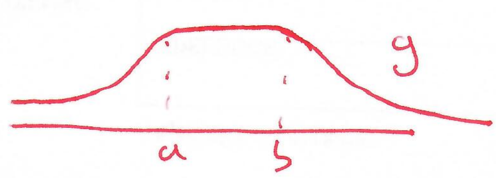
Por ser Ω conexo $\Rightarrow$ $S = \Omega$.

Ejercicio **COROLARIO** Sean $f, g: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (dos funciones) analíticas tal que $g(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega_1 \subseteq \Omega$, Ω_1 abierto o bien $\exists z_0 \in \Omega$ con $f^{n)}(z_0) = g^{n)}(z_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $f = g$

OBSERVACIÓN: Lo anterior no es cierto en $\mathbb{R}$.

$\exists\, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

con $g|_{[a,b]} = 0$ y $g \not\equiv 0$.



Claro g no puede ser analítica en $\mathbb{R}$.

TEOREMA (DE IDENTIDAD 2:)

SEA Ω UN ABIERTO CONEXO Y SEA $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, f ANALÍTICA EN Ω. SEA UNA SUCESIÓN $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \Omega$ CON $z_n \to z_0 \in \Omega$ TAL QUE $f(z_n)=0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ CON INFINITOS z_n DISTINTOS; ENTONCES

$$f|_{\Omega} \equiv 0$$

DEM $z_0 \in \Omega$ y f ANALÍTICA EN z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0, r)$$

PARA ALGÚN $r>0$

SI f NO ES NULA EN $D(z_0, r)$, EXISTE UN $m \in \mathbb{N}$ CON $f^{m)}(z_0) \neq 0$

ASÍ
$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m)!} f^{n+m)}(z_0) (z-z_0)^{n+m} =$$

$$= (z-z_0)^m \underbrace{\left[\frac{1}{m!} f^{m)}(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)!} f^{m+n)}(z_0)(z-z_0)^n\right]}_{g(z) \text{ ANALÍTICA}}$$

$f(z) = (z-z_0)^m g(z) \quad \forall |z-z_0| < r$

$g(z_n) = 0 \quad \forall z_n \in D(z_0, r)$ [ASÍ $\exists n_0 : n \geq n_0 \ g(z_n) = 0$]

y $g(z_0) = \frac{1}{m!} f^{m)}(z_0) \neq 0$

ASÍ g NO ES CONTINUA EN z_0, PERO POR OTRO LADO

$$\left.\begin{array}{l} g(z) = \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^m} \\ \text{y } \displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{1}{m!} f^{m)}(z_0) \end{array}\right\} \text{ } g \text{ ES CONTINUA EN } D(z_0, r)$$

CONTRADICCIÓN !!

COROLARIO SEAN $f, g: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ FUNCIONES ANALÍTICAS SOBRE UN ABIERTO CONEXO Ω, DE MODO QUE $f(z_n) = g(z_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ SOBRE UNA SUCESIÓN INFINITA CON $z_n \to z_0 \in \Omega$. ENTONCES $g \equiv f$.

LAS FUNCIONES EXPONENCIAL, LOGARITMO Y TRIGONOMÉTRICAS.

DEF: LA FUNCIÓN EXPONENCIAL SE DEFINE POR

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad (*)$$

DADO QUE LA SERIE DE POTENCIAS $(*)$ TIENE RADIO DE CONVERGENCIA ∞, LA FUNCIÓN e^z ESTÁ BIEN DEFINIDA Y ES ANALÍTICA EN TODO $\mathbb{C}$.

PROPIEDADES:

1:] $y \in \mathbb{R}$, $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ FÓRMULA DE EULER

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^{2k} y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^{2k+1} y^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{2k!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

OBSERVACIÓN:
$\gamma(t) = e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$ CIRCUNFERENCIA POSITIVAM. ORIENTADA

$\gamma_2(t) = e^{-it}$ $t \in [0, 2\pi]$ CIRCUNFER. ORIENTADA NEGATIVAMENTE

ASÍ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $e^{2\pi n i} = 1$ y $e^{i\pi} = -1 \iff \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$

2:] $e^{x+yi} = e^x e^{yi}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

~~SEA $f(x,y) = e^{x+yi}$ f ANALÍTICA $\Rightarrow$ DIFERENCIABLE~~

~~$h(x,y) = e^x e^{yi} = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$~~

~~[illegible] $= f'\cdot(1,0) = f$~~

~~$Df \cdot (0,1) = \nabla f_2 = f' \cdot (0,1) = i f'$~~

LA FORMA MÁS CÓMODA, SIN USAR PRODUCTO DE SERIES, PARA HACER ESTA PRUEBA ES USAR LA CONSECUENCIA DEL TEOREMA DE CAUCHY, QUE VEREMOS MÁS ADELANTE,
SI $f \in H(\Omega) \Rightarrow f$ ES ANALÍTICA EN Ω.
($\Leftarrow$) YA LA SABEMOS

SEA $f(x,y) = e^{x+yi}$ ANALÍTICA

SEA $h(x,y) = e^x e^{yi} = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$ DIFERENCIABLE Y SATISFACE LAS CONDICIONES DE CAUCHY-RIEMANN $\Rightarrow$ ANALÍTICA EN Ω

AHORA $f(0,y) = h(0,y)$ $\forall y \in \mathbb{R}$, LUEGO POR LOS TEOREMAS DE IDENTIDAD SON IGUALES.

3) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \quad \forall z_1 z_2 \in \mathbb{C}$

SEA $z_1 \in \mathbb{C}$ FIJO,

SEA $g(z) = e^{z_1+z}$

$h(z) = e^{z_1}e^{z}$ AMBAS DERIVABLES Y POR TANTO ANALÍTICAS

SI $z \in \mathbb{R}$ $g(z) = e^{z_1+z} = e^{\operatorname{Re} z_1 + z} e^{i \operatorname{Im} z_1} =$

$2)$

$= e^{\operatorname{Re} z_1} e^{z} e^{i \operatorname{Im} z_1} = e^{z_1} e^{z} = h(z)$

COMO $h(z) = g(z)$ $\forall z \in \mathbb{R}$, POR EL TEOREMA DE IDENTIDAD g y h SON IGUALES.

4) a) $|e^{z}| = e^{\operatorname{Re} z}$

Ejercicio

b) $e^{0} = 1$ y $e^{z} \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

c) $e^{x+yi} = e^{x}(\cos y + i \operatorname{sen} y)$

d) $e^{w} = 1 \iff w = 2k\pi i \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

e) $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$ $e^{\lg|z| + i \arg z} = z$

5) $\forall z \in \mathbb{C}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ $(e^{z})^{n} = e^{z}$.

4 y 5) Ejercicio

4 d) SI $w = 2k\pi i$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ $e^{w} = e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \operatorname{sen} 2k\pi = 1$

POR OTRO LADO $e^{w} = e^{\operatorname{Re} w}(\cos \operatorname{Im} w + i \operatorname{sen} \operatorname{Im} w) = 1$

$\Rightarrow |e^{\operatorname{Re} w}| = 1 \iff \operatorname{Re} w = 0$

y $\operatorname{Im} w = 2k\pi$ PARA QUE $\left\{ \cos \operatorname{Im} w = 1 \right.$

LA FUNCIÓN LOGARITMO

OBSERVACIÓN $(e^z)' = e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, por el teorema de la función inversa e^z tiene una inversa al menos local; lo que no va a existir es una inversa global

EJERCICIO: LA IMAGEN POR e^z DE $\mathbb{C}$ ES $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ DEM SEA $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ $z = |z|(\cos\theta + i\sen\theta)$, $|z| \neq 0$
$z = e^{\lg|z| + \theta i}$

DEF SEA $\Omega \subset \mathbb{C} - \{0\}$ UN ABIERTO CONEXO.

UNA APLICACIÓN $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ ES UNA DETERMINACIÓN DEL LOGARITMO (respect. DEL ARGUMENTO) EN Ω SI Y SOLO SI f ES CONTINUA Y $\forall z \in \Omega$

$$e^{f(z)} = z \quad (\text{respect. } f(z) \text{ ES UN ARGUMENTO DE } z)$$

SI $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, DECIMOS QUE $w \in \mathbb{C}$ ES UN LOGARITMO (DETERMINADO) DE z SI Y SOLO SI $e^w = z$

OBSERVACIÓN

- SI $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ EXISTE UN <u>ARGUMENTO PRINCIPAL</u> DE z $\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi)$, PERO $\operatorname{Arg} z + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ ES UNA DETERMINACIÓN DEL ARGUMENTO DE z

Y VEMOS QUE $w_k = |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)$

$$\Rightarrow \quad e^{w_k} = z \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

ASÍ TANTO LAS DETERMINACIONES DE LOS ARGUMENTOS Y LOS LOGARITMOS DE $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ <u>NO SON ÚNICOS</u>

PROPOSICIÓN 1:) SI $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ SON LOGARITMOS DE $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, ENTONCES
Ejercicio
$w_1 - w_2 = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.
SI θ ES UN ARGUMENTO DE $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, ENTONCES
$\{\lg|z| + i\theta + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$ ES EL CONJUNTO DE LOS LOGARITMOS DE z.

2:) SEA $\Omega \subset \mathbb{C} - \{0\}$ REGIÓN Y $f, g\ \Omega \to \mathbb{C}$ DETERMINACIONES DEL LOGARITMO (resp DEL ARGUMENTO) EN Ω, $\exists k \in \mathbb{Z}$ TAL QUE
$f(z) - g(z) = 2k\pi i$ (resp $f(z) - g(z) = 2k\pi$) $\forall z \in \Omega$.

3:) SI $\operatorname{Arg} z$, PARA $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ ES EL ARGUMENTO PRINCIPAL DE $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ Y $f(z) = \lg|z| + i \operatorname{Arg} z$. SI $\Omega = \mathbb{C} - \{x + yi : y = 0,\ x \geq 0\}$. ES UNA DETERMINACIÓN (LA PRINCIPAL) DEL LOGARITMO Y $\lg \in H(\Omega)$.

DEM 1:] Si $e^{w_1} = e^{w_2} \Rightarrow e^{w_1 - w_2} = 1 \Rightarrow$ propiedades de e^z

$w_1 - w_2 = 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}$.

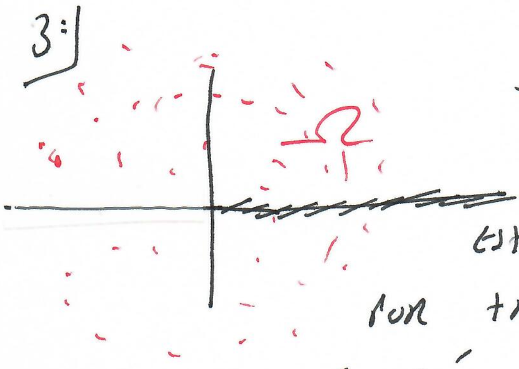
Así $e^{\log|z| + i(\theta + 2k\pi)} = z \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ si θ es una determinación del argumento de z (ya que $e^{x+iy} =$

$= e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$)

2:] Sean $f, g: \Omega \to \mathbb{C}$ determinaciones del logaritmo en el abierto Ω, $f - g: \Omega \to \mathbb{C}$ es continua y por el apartado 1:] $\forall z \in \Omega \quad f(z) - g(z) = 2k\pi i$. Dado que Ω es conexo y $f - g$ continua $\exists!\, k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $f - g = 2k_0\pi i$

- Para los argumentos el razonamiento es análogo

3:]



$\Omega = \mathbb{C} - \{z : \operatorname{Im} z = 0 \text{ y } \operatorname{Re} z > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longrightarrow \operatorname{Arg} z$

Esta función es continua

Por tanto $\log z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$ es una función de Ω en $\mathbb{C}$ continua.

(usar teorema de la función inversa local.)

Por otro lado $\forall z \in \Omega$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{e^{f(z+h)} - e^{f(z)}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\frac{e^{f(z+h)} - e^{f(z)}}{f(z+h) - f(z)}} = \frac{1}{\underbrace{e^{f(z)}}_{\neq 0}} = \frac{1}{z}$$

Así $f(z) = \log|z| + i \operatorname{Arg} z \quad z \in \Omega = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ es holomorfa, $f \in H(\Omega)$ y

$f'(z) = 1/z$

LA FUNCIÓN POTENCIAL

DEF Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq 0$ se define

En el caso real siempre se pide $a>0$ para definir a^x

$$z_1^{z_2} = e^{z_2 \log z_1} = e^{z_2(\lg|z_1| + (\operatorname{Arg} z_1 + 2k\pi)i)}$$

(Función multiforme)

Valor principal $z_1^{z_2} = e^{z_2 \lg z_1} = e^{z_2(\lg|z_1| + i\operatorname{Arg} z_1)}$

EJEMPLO Si $\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ $\quad f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\; z \longrightarrow z_1^{z}$

$$f'(z) = z_1^{z} \lg z_1$$

ya que $f(z) = e^{z \lg z_1}$ composición de funciones derivables.

EJEMPLO $\boxed{i^i = e^{i \lg i} = e^{i[\lg 1 + i\pi/2]} = e^{-\pi/2}}$

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

DEF $\forall z \in \mathbb{C}$ se define

$$\operatorname{sen} z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

PROPOSICIÓN: Ejercicio 1º) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ y $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

Ejercicio 2º) $\operatorname{sen} z, \cos z \in H(\mathbb{C})$ y $(\operatorname{sen} z)' = \cos z$ y $(\cos z)' = -\operatorname{sen} z$

(Derivación término a término de la serie de potencias)

Ejercicio 3º) Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$$

Donde $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\quad \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

DEM EJERCICIO

$$\cos(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} =$$

$$= \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \cos x - i\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right) \operatorname{sen} x$$

$\operatorname{sen}(x+iy) = \dots$ etc.