ESPACIOS DE HILBERT.

EL ESPACIO $L_2(\Omega)$ CON ESTRUCTURA DE ESPACIO DE HILBERT.

EN $\mathbb{R}^n$, EL PRODUCTO ESCALAR

$$\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad (= \|x\|_2 \|y\|_2 \cos \measuredangle xy)$$

PERMITE DEFINIR UNA MÉTRICA SOBRE $\mathbb{R}^n$ COMO UNA FORMA DE MEDIR ÁNGULO

SE DEFINE EL MÓDULO $x \in \mathbb{R}^n$ POR $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

DE FORMA ABSTRACTA

DEFINICIÓN SEA H UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE UN CUERPO $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ Ó $\mathbb{C}$). UN PRODUCTO ESCALAR SOBRE H ES UNA OPERACIÓN

$$\langle\, ,\, \rangle \; H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$$

QUE $\forall\, x,y,z \in H$ Y $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ VERIFICA

a) $\langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$ } LINEAL EN LA 1ª VARIABLE

b) $\langle \lambda x, z\rangle = \lambda \langle x,z\rangle$

c) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,z\rangle}$ } SIMÉTRICA SI $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; SIMÉTRICA CONJUGADA SI $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

d) $\langle x,x\rangle \geq 0$ } DEFINIDA ESTRICTAMENTE POSITIVA

e) $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

EJEMPLOS - $(\mathbb{R}^n \langle\, \rangle)$ ES UN PRODUCTO ESCALAR

- EN $L_2(\Omega)$ UN PRODUCTO ESCALAR ES

$$\langle f,g\rangle = \int_\Omega f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \quad \text{(VER PRÁCTICA)}$$

$$-\langle\, ,\, \rangle \quad \ell_2 \times \ell_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$((x_n)(y_n)) \longrightarrow (x_n, y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$ ES UN PRODUCTO

ESCALAR (TOMAR $\Omega = \mathbb{N}$ Y $\mu(A) = \text{CARDINAL}(A)$ $A \subseteq \mathbb{N}$,

ASÍ $\int_\Omega (x_n)\overline{(y_n)}\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

LAS PROPIEDADES QUE SIGUEN SON COMUNES A TODOS LOS ESPACIOS SOBRE LOS QUE HAY DEFINIDOS UN PRODUCTO ESCALAR (POR TANTO SON PROPIEDADES BIEN CONOCIDAS EN $\mathbb{R}^n$)

OBSERVACIÓN (EJERCICIO) DE LAS PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR SE DEDUCE

a) $\langle 0,y\rangle = \langle y,0\rangle = 0 \quad \forall y \in H$.

$\langle 0,y\rangle = \langle 0\cdot 0, y\rangle = 0\langle 0,y\rangle = 0\,\overline{\langle y,0\rangle} = \overline{\langle y,0\rangle}$

ASÍ $\langle 0,y\rangle = 0$ y $\overline{\langle y,0\rangle} = 0$.

b) $\langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$.

$\langle x,y+z\rangle = \overline{\langle y+z,x\rangle} = \overline{\langle y,x\rangle + \langle z,x\rangle} = \overline{\langle y,x\rangle} + \overline{\langle z,x\rangle}$
$= \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$.

c) $\langle x,\lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x,y\rangle$

$\langle x,\lambda y\rangle = \overline{\langle \lambda y, x\rangle} = \overline{\lambda\langle y,x\rangle} = \bar{\lambda}\,\overline{\langle y,x\rangle} = \bar{\lambda}\langle x,y\rangle$.

d) FIJADO $y\in H$ LA APLICACIÓN

$\langle \cdot, y\rangle : H \to \mathbb{K}$
$x \to \langle x,y\rangle$ ES LINEAL

FIJADO $x \in H$ LA APLICACIÓN

$\langle x, \cdot\rangle : H \to \mathbb{K}$
$y \to \langle x,y\rangle$ ES ANTILINEAL

e) $\langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0$

SI $x=0$ $\langle 0,0\rangle = 0$ | POR a)

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS

DEF Sea H un espacio vectorial con $\langle\ \rangle$ un producto escalar sobre él (¿ también espacio pre-Hilbert).

$x, y \in H$ se llaman ortogonales si $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle = 0$.

TEOREMA Sea H un espacio pre-Hilbert.

a) (Identidad de polarización) $\forall x,y \in H$

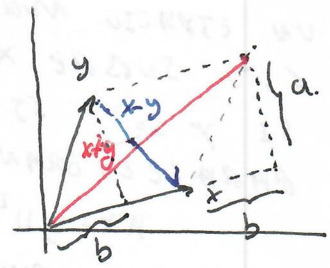
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\langle x+y,x+y\rangle - \langle x-y,x-y\rangle + i\langle x+iy,x+iy\rangle - i\langle x-iy,x-iy\rangle\right]$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\langle x+y,x+y\rangle - \langle x-y,x-y\rangle\right]$$

b) Identidad del paralelogramo

$\forall x,y \in H$

$$\langle x+y,x+y\rangle + \langle x-y,x-y\rangle = 2[\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle]$$



c) Teorema de Pitágoras

$\forall x,y \in H$, ortogonales

$$\langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle.$$

$$\|x+y\|^2 = (\|x\|+b)^2 + a^2$$
$$\|x-y\|^2 = (\|x\|-b)^2 + a^2$$
$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2b^2 + 2a^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

d) Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$\forall x,y \in H$

$$|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

e) Desigualdad de Minkowski

$\forall x,y \in H$ $\quad (\langle x+y,x+y\rangle)^{1/2} \le (\langle x,x\rangle)^{1/2} + (\langle y,y\rangle)^{1/2}$

DEM ejercicio, ver práctica

DEF a) Sea H un espacio pre-Hilbert. Se define la norma 2 sobre H

$$\|x\|_2 = (\langle x,x\rangle)^{1/2} \quad \forall x \in H.$$

De las propiedades anteriores se sigue que $\|\ \|_2$ es una norma

b) Un espacio pre-Hilbert H se llama espacio de Hilbert si $(H, \|\ \|_2)$ es un espacio de Banach (i.e. si la norma $\|\ \|_2$ es completa en H.

Ejemplo $L_2(\Omega)$ y ℓ_2 son espacios de Hilbert (ya probamos que eran completos.

NOTA - Los espacios de Hilbert son la abstracción de los espacios $(\mathbb{R}^n \|\ \|_2)$, $(\ell_2(\Omega) \|\ \|_2)$; de hecho todo lo que sirve para Hilbert sirve para $(\ell_2(\Omega) \|\ \|_2)$ y viceversa

- Estos espacios de Banach son muy especiales pues tenemos una geometría con la de $\mathbb{R}^n$ (ortogonalidad) que hace que sean fáciles de manejar

- Von-Neumann los introdujo (generalizó $\ell_2(\mathbb{R})$) y los usó en el estudio teórico de la mecánica cuántica:

Postulado I "A cada sistema físico que se pretende describir en el marco de la mecánica cuántica se le hace corresponder un espacio de Hilbert complejo y separable .... "

Teorema (Jordan - Von Neumann 1935) Sea $(X \|\ \|)$ un espacio normado. Existe un producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ sobre X de modo que $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle\ \forall x \in X$ si y solo si la norma satisface la ley del paralelogramo (e.d.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x,y \in X)$$

Obsérvese: la relación profunda entre espacio de Hilbert y la geometría euclídea.

Proposición Sea H un espacio de Hilbert (o prehilbert)

a) $\forall x,y \in H \quad |\langle x,y\rangle| \le \|x\| \|y\|$.

b) Fijado $y \in H$, la aplicación lineal $\langle\ , y\rangle\ H \to \mathbb{K}$, $x \to \langle x,y\rangle$ es continua (e.d. $\langle\ , y\rangle \in H'$).

c) El producto escalar $\langle\ ,\ \rangle\ H \times H \to \mathbb{K}$ es continua

Dem a) Es la desigualdad de Cauchy-Schwarz (práctica)

b) $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|_2 \|y\|$ así $\|\langle\ , y\rangle\| \le \|y\|$ como $\langle y,y\rangle = \|y\| \cdot \|y\|$ $\Rightarrow \|\langle\ , y\rangle\| = \|y\|$

Así $T\ H \to H'$, $y \to \langle\ , y\rangle$ es una isometría, es más es una biyección

c) (Ejercicio) Si $x_n \to x$, $y_n \to y$

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x,y\rangle| = |\langle x_n - x, y\rangle + \langle x_n, y_n - y\rangle| \le \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ORTOGONALIDAD EN ESPACIOS DE HILBERT

SEA UN $(H, \| \|)$ UN ESPACIO DE HILBERT Y $\langle\ \rangle$ EL PRODUCTO ESCALAR ASOCIADO. ($\langle x, x\rangle = \|x\|^2$)

DEFINICION a) $x, y \in H$ SON ORTOGONALES SI $\langle x, y\rangle = 0$ (NOTACION $x \perp y$).

b) SE DICE QUE $x \in H$ Y $A \subseteq H$ SON ORTOGONALES SI $\langle x, a\rangle = 0$ $\forall a \in A$ ($x \perp A$)

c) SE DICE QUE $A, B \subseteq H$ SON ORTOGONALES SI $\langle a, b\rangle = 0$ $\forall a \in A$ Y $\forall b \in B$ ($A \perp B$)

d) SEA $A \subseteq H$ SE DENOTA POR

$$A^{\perp} = \{x \in H : \langle x, a\rangle = 0 \quad \forall a \in A\}$$

OBSERVACION SI $A \perp B \Rightarrow B \perp A$.

PROPOSICION SEA $A \subseteq H$, H HILBERT. ENTONCES

a) $A^{\perp}$ ES UN SUBESPACIO (VECTORIAL) CERRADO DE H.

b) $A^{\perp} = \overline{[A]}^{\perp}$ ($\overline{[A]}$ SUBESPACIO CERRADO ENGENDRADO POR A).

DEM

a) COMO $\forall a \in A$ $\varphi_a = \langle\ , a\rangle : H \to \mathbb{K}$, $\langle\ , a\rangle \in H'$.

$$A^{\perp} = \bigcap_{a \in A} \varphi_a^{-1}(\{0\})$$

Y POR SER φ_a LINEAL $\varphi_a^{-1}(\{0\})$ ES UN SUBESPACIO Y POR SER φ_a CONTINUA $\varphi_a^{-1}(\{0\})$ ES CERRADO

b) EJERCICIO $A \subseteq \overline{[A]} \Rightarrow \overline{[A]}^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.

AHORA SI $x \in A^{\perp} \Rightarrow \langle x, a\rangle = 0$ $\forall a \in A$

ASI SI $\sum \lambda_i a_i \in [A] \Rightarrow \langle x, \sum \lambda_i a_i\rangle = 0$

Y COMO $\langle x, \ \rangle$ ES CONTINUA $\Rightarrow \forall b \in \overline{[A]} \Rightarrow \langle x, b\rangle = 0$.

DEF SEA H UN ESPACIO DE HILBERT Y SEA I CONJUNTO DE INDICES

a) $E = \{e_i\}_{i \in I} \subseteq H$ SE LLAMA ORTOGONAL SI $e_i \perp e_j$ $\forall i \neq j$

b) $E \subseteq H$ SE LLAMA ORTONORMAL SI E ES ORTOGONAL Y $\forall e \in E$ $\|e\| = 1$.

TEOREMA SEA H UN ESPACIO DE HILBERT.

a) TEOREMA DE PITAGORAS

SI $\{x_1 \dots x_n\}$ ES ORTOGONAL EN H, ENTONCES

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

b) SI $E \subseteq H$ ORTOGONAL Y $0 \notin E$, ENTONCES E ES LINEALMENTE INDEPENDIENTE

DEM a) $(x_1 + \dots + x_{n-1}) \perp x_n$ Y SE APLICA INDUCCIÓN AL TEOREMA CLÁSICO DE PITÁGORAS

b) SEA $(x_i)_{i=1}^{n} \in E$ Y SEA $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ CON $\lambda_i \in \mathbb{K}$

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, x_j \right\rangle = \lambda_j \|x_j\|^2 = \begin{cases} \|x_j\| = 0 \Rightarrow x_j = 0 \ !! \text{ NO ES POSIBLE} \\ \lambda_j = 0 \end{cases}$$

TEOREMA (DESIGUALDAD DE BESSEL)

a) SEA $\{e_1 \dots e_m\} \subseteq H$ UN CONJUNTO ORTONORMAL

$\forall x \in H$ SE TIENE $\sum_{i=1}^{m} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

b) SI $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq H$ ES UN CONJUNTO NUMERABLE DE H ORTONORMAL ENTONCES $\forall x \in H$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

DEM b) SE DEDUCE DE a), SI AQUI LA PRUEBA NO DEPENDE DE M.

a) SEA $x \in H$ Y SEAN $x_m = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i$ POR ORTOGONALIDAD

$$\langle x, x_m \rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle x, \langle x, e_i \rangle e_i \rangle = \sum_{i=1}^{m} \overline{\langle x, e_i \rangle} \langle x, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{m} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

POR ORTOGONALIDAD ← !!

POR OTRO LADO

$$0 \leq \|x - x_m\|^2 = \langle x - x_m, x - x_m \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x_m, x \rangle - \langle x, x_m \rangle + \langle x_m, x_m \rangle$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{m} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

COROLARIO. Sea H un espacio de Hilbert y $E \subseteq H$ ortonormal, sea $x \in H$. Y $E_x = \{e \in E : \langle x, e \rangle \neq 0\}$, entonces E_x es numerable y si $E_x = \{(e_l)_{l=1}^{\infty}\}$ se tiene que

$$\langle x, e_l \rangle \xrightarrow[l \to \infty]{} 0$$

DEM. Si $x \in H$, para $j = 1, 2, \ldots$ sea

$$E_j = \{e \in E : |\langle x, e \rangle|^2 > \frac{\|x\|^2}{j}\}$$

Así (con la desigualdad de Bessel y de Pitágoras) E_j contiene a lo más j elementos

$$\left(\|x\|^2 \geq \sum_{l=1}^{m} |\langle x, e_l \rangle|^2 > m \left(\frac{\|x\|^2}{j} \right) \geq \|x\|^2 \right.$$
si $m > j$)

Claramente $E_x = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ y así E_x es numerable; en este caso, como $\sum_{l=1}^{\infty} |\langle x, e_l \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \infty$, se sigue que $\lim_{l \to \infty} \langle x, e_l \rangle = 0$.

DEFINICIÓN. Un subconjunto ortonormal $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq H$ se llama base ortonormal si es máximal en el sentido de que no existe $x \in H \setminus \{0\}$ tal que $\langle e_i, x \rangle = 0 \quad \forall i \in I$.
(En otro caso $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq \{e_i\} \cup \{\frac{x}{\|x\|}\}$. Subconjunto de H ortonormal y más grande).

TEOREMA. Sea H un espacio de Hilbert. 1ª vez que usaremos la completitud

y $E = \{e_i\}_{i \in I}$ un conjunto ortonormal. Son equivalentes:

i) $\{e_i\}$ es una base ortonormal de H
ii) $\forall x \in H \quad x = \sum_{l=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$. (Convergencia en H) (Serie de Fourier)
iii) $\forall x \in H \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ (Fórmula de Parseval)
iv) Si $x \in H$ y $\langle x, e_i \rangle = 0 \quad \forall i \in I \Rightarrow x = 0$.

DEM i) ⇒ ii)

Si $x \in H$ por el corolario anterior

$E_x = \{ e \in E : \langle x, e \rangle \neq 0 \} = \{ e_1, e_2, \dots, e_n, \dots \}$ contable

y $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \infty$

Sea $x_m = \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n \rangle e_n$.

$$\|x_m - x_k\|^2 = \left\| \sum_{n=k+1}^{m} \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 =$$

$$= \left\langle \sum_{n=k+1}^{m} \langle x, e_n \rangle e_n, \sum_{n=k+1}^{m} \langle x, e_n \rangle e_n \right\rangle = \text{por ortogonalidad}$$

$$\sum_{n=k+1}^{m} |\langle x, e_n \rangle|^2 \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$$

Luego $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy en H y así

$$\exists\, y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n .$$

Si $y \neq x$, sea $u = \frac{y-x}{\|y-x\|}$, $\|u\| = 1$,

$$\langle u, e_n \rangle = \frac{1}{\|y-x\|} \left(\langle x, e_n \rangle - \langle x, e_n \rangle \right) = 0$$

Si $e \in E - \{e_n\}$ $\quad \langle x, e \rangle = 0 = \langle y, e \rangle$

Así $\langle u, e \rangle = 0 \ \forall e \in E$ contradice la hipótesis!!

ii) ⇒ iii) Sea $x \in H$.

$$\langle x, x \rangle = \left\langle \sum \langle x, e_n \rangle e_n, \sum \langle x, e_n \rangle e_n \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle x, e_n \rangle} = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

$\langle , \rangle$ continua y la ortogonalidad

iii) ⇒ iv) Si $x \in H$ y $\langle x, e_i \rangle = 0 \ \forall i \in I \overset{\text{iii)}}{\Rightarrow} \|x\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

iv) ⇒ i) Si A es ortonormal en H con $E = \{e_i\}_{i \in I} \subseteq A$

Si $a \in A$ y $\langle a, e_i \rangle = 0 \ \forall i \in I \Rightarrow a = 0$, así $A = E$

Luego E es base ortonormal

LA PREGUNTA QUE NOS DEBEMOS HACER AHORA ES SI VAN A EXISTIR BASES ORTOGONALES EN UN HILBERT

TEOREMA (DE ORTONORMALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT 1907) SI H ES UN ESPACIO DE HILBERT SEPARABLE, EXISTE UNA BASE ORTONORMAL $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ NUMERABLE

DEM SI H ES SEPARABLE EXISTE $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq H$ DENSO Y COMO VIMOS $\overline{[u_n]} = H$.

SI EXISTE $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ORTONORMAL CON

(*) $[(u_n)_{n=1}^{m}] = [(e_n)_{n=1}^{m}] \quad \forall m \in \mathbb{N}$

ENTONCES $[u_n] = [e_n]$.

Y ASÍ $(e_n)^{\perp} = [e_n]^{\perp} = [u_n]^{\perp} = \overline{[u_n]}^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$.

ASÍ POR EL APARTADO IV) DE TEOREMA ANTERIOR, $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ES UNA BASE.

(*) ESTO ES EL PROCESO DE ORTOGONALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT VISTO EN LOS ESPACIOS EUCLÍDEOS DE 1º CURSO

TEOREMA SEA $H \neq \emptyset$ UN ESPACIO DE HILBERT, ENTONCES SIEMPRE EXISTE UNA BASE ORTONORMAL

D USA EL LEMA DE ZORN.

EJEMPLO $(\ell_2 \; \| \; \|_2)$ COMO $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot x_i$

SABEMOS QUE ES COMPLETO Y SEPARABLE, ES UN HILBERT

SEA $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ $\|e_n\| = 1$ Y $\langle e_n, e_m \rangle = 0 \quad \forall n \neq m$

Y SABEMOS QUE

$\forall x \in \ell_2 \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$; LUEGO $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ES UNA BASE ORTONORMAL

EJEMPLO (FUNDAMENTAL).

EN $L_2[-\pi, \pi]$ ESPACIO DE HILBERT SEPARABLE

SEA $\{1, \cos nt, \operatorname{sen} nt\}_{n=1}^{\infty}$ ES UN SISTEMA ORTOGONAL COMPLETO (DE HECHO DE AQUÍ SALE LOS CONCEPTOS ABSTRACTOS DE ORTOGONALIDAD EN HILBERT.

(ej) ES UNA BASE ORTONORMAL)