EL PROBLEMA DE LA SERIE DE FOURIER

FOURIER (1822) DICE QUE TODA FUNCIÓN 2π-PERIÓDICA SE PUEDE ESCRIBIR COMO UNA SERIE DE SENOS Y COSENOS. ES DECIR SI f PERIÓDICA $\exists\, a_n, b_n$ COEFICIENTES CON

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \quad (*)$$

(ESTA EXPRESIÓN LE VIENEN BIEN PARA SUS CÁLCULOS EN LA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DEL CALOR).

EN 1822 NO ESTABAN DEFINIDOS:

- CONCEPTO DE FUNCIÓN
- CONVERGENCIA PUNTUAL
- CONVERGENCIA UNIFORME
- LA INTEGRAL DE RIEMANN.
- $\mathbb{R}$ Y $\mathbb{C}$ COMO TALES.

(AUNQUE SE TRABAJABA IMPLÍCITAMENTE CON TODOS ESTOS CONCEPTOS)

<u>LEMA</u> $\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 2\pi$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi$; $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx\,dx = \pi$.

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx\,dx = 0 \quad \forall n,m \in \mathbb{N}$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = 0 \quad \forall n,m \in \mathbb{N},\ n \neq m.$

$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cdot \cos mx\,dx = 0 \quad \forall n,m \in \mathbb{N},\ n \neq m.$

<u>DEM</u> INTEGRAR. TENER EN CUENTA QUE

$\cos A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B))$

$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))$

$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$

<u>OBSERVACIÓN</u> EN $L_2([-\pi,\pi],\mathbb{R}) = \{f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R} : \exists \int_{[-\pi,\pi]} |f|^2 d\mu < \infty\}$ EL SISTEMA $\{1, \cos nx, \operatorname{sen} nx\}$ ES ORTOGONAL

SI f SE ESCRIBE COMO (*)

entonces $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2} \times 2\pi = a_0\pi.$

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = a_n \pi.$

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\,dx = b_n \pi.$

LUEGO $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad n\geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\operatorname{sen} nx\,dx \qquad n\geq 1.$$

OBSERVACIÓN SI H ES UN ESPACIO DE HILBERT SEPARABLE Y $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ES UNA BASE ORTONORMAL.

$\forall x \in H \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$ (LO MISMO QUE HIZO FOURIER)

- HASTA 1876 SE PENSÓ QUE TODA FUNCIÓN CONTINUA 2π-PERIÓDICA SE PODÍA ESCRIBIR COMO SU SERIE DE FOURIER (*) (~1850 RIEMANN INVENTA SU INTEGRAL PARA OPERAR CORRECTAMENTE EN LA BÚSQUEDA DE SERIES DE FOURIER)
- EN 1876 DUBOIS-REYMOND ENCONTRÓ UNA FUNCIÓN CONTINUA CUYA SERIE DE FOURIER NO CONVERGE EN UN PUNTO
- EN 193_ CON EL ANÁLISIS FUNCIONAL (USANDO EL TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS) SE ENCONTRÓ QUE UNA "CANTIDAD GRANDE" DE FUNCIONES CONTINUAS TIENEN SERIES DE FOURIER QUE AL MENOS DIVERGEN EN UN PUNTO.
- EN 1926 KOLMOGOROV DIO UN EJEMPLO $f \in L_1[-\pi,\pi]$ CUYA SERIE DE FOURIER DIVERGE EN TODO $t\in[-\pi,\pi]$.

(**) - EN 1966 CARLESON Y EN 1968 HUNT PROBARON QUE (PREMIO ABEL 2004 Ó 2005). $\forall f \in L_p[-\pi,\pi]$, $1<p\leq\infty$ LA SERIE DE FOURIER CONVERGEN EN μ-CASI TODO PUNTO DE $[-\pi,\pi]$.

TEOREMA SI $f \in L_2([-\pi,\pi], \mathbb{R})$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \xrightarrow{\|\ \|_2} f.$$

DEM) EL SISTEMA $\{1, \cos nx, \operatorname{sen} nx\}$ ES ORTOGONAL EN L_2; SOLO FALTA VER QUE ES COMPLETO. (*)

SOLO POR (**) TENEMOS LA CONVERGENCIA μ-c.t.p. EN $[-\pi,\pi]$.

(*) EL TEOREMA DE WEIERSTRASS DICE QUE LOS POLINOMIOS TRIGONOMÉTRICOS SON DENSOS EN $C[-\pi,\pi]$; LAS FUNCIONES CONTINUAS SON DENSAS EN $L_2[-\pi,\pi]$ PORQUE APROXIMAN A LAS FUNCIONES SIMPLES, ASÍ $[\{1, \cos nt, \operatorname{sen} nt\}_{n=1}^{\infty}] = L_2[-\pi,\pi]$ Y AHORA SE SIGUE EL PROCESO DIAGONALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT.

LA SERIE DE FOURIER GENERAL

SEA H UN ESPACIO DE HILBERT SEPARABLE

SEA $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ UNA BASE ORTONORMAL.

$$\forall x \in H \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$ CON CONVERGENCIA EN LA NORMA DE H.

(SERIE DE FOURIER DE x ASOCIADA A LA BASE $\{e_n\}$

EJEMPLO SEA $L_2(\mathbb{R}, \mu)$ DONDE $\mu(A) = \int_A w(x)dx$

CON $w \geq 0$, w CONTINUA Y CON $\int_{\mathbb{R}} w(x)dx < \infty$.

POR SER μ σ-FINITA LOS POLINOMIOS SON DENSOS EN $L_2(\mathbb{R}, \mu)$

ASI $\{t^n\}_{n \geq 1}$ SE LE APLICA EL PROCESO DE ORTONORMALIZACION DE GRAM-SCHMIDT Y SE OBTIENEN CIERTAS FAMILIAS CLÁSICAS DE POLINOMIOS ORTONORMALES, QUE FORMAN UNA BASE ORTONORMAL DE $L_2(\mathbb{R}, \mu)$

* ASI EN $[-1, 1]$ SI $w(t) \equiv 1$ SALEN LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

* SI EN $[-1, 1]$ SEA $w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ SE OBTIENEN LOS POLINOMIOS DE TCHEBYCHEV

* SI EN $[0, \infty)$, SEA $w(t) = e^{-t}$ SE OBTIENEN LOS POLINOMIOS DE LAGUERRE

* SI EN $\mathbb{R}$, SEA $w(t) = e^{-t^2}$ SE OBTIENEN LOS POLINOMIOS DE HERMITE