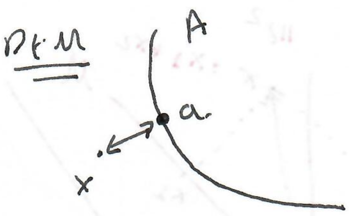
RESULTADOS CLÁSICOS EN ESPACIOS DE HILBERT

PROPOSICIÓN Sea $A \subseteq H$, espacio de Hilbert, A un conjunto convexo y cerrado. Si $x \in H$. Existe un único $a \in A$, tal que

$$\|x-a\| = dis(x,A) \overset{def}{=} \inf\{\|x-y\| : y \in A\}.$$

DEM



En $\mathbb{R}^n$ esto es cierto, ya que si $y \in A$ y $r := \|y-x\|$, sea $\overline{B_x(r)}$, así

$$dis(x,A) = dis(x, A \cap \overline{B_x(r)})$$

y como $A \cap \overline{B_x(r)}$ es compacto, por serlo $\overline{B_x(r)}$ se sigue el resultado. Pero en un Banach, $\overline{B_x(r)}$ no es compacto (si $\dim H = \infty$).

Sea $\delta = d(x,A)$ y $a, b \in A$ por la identidad del paralelogramo aplicada a $x-a$, $x-b$.

Caracteriza a los espacios de Hilbert.

$$\|(x-a)+(x-b)\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|x-a\|^2 + 2\|x-b\|^2 \quad (*)$$

Como $\frac{1}{2}(a+b) \in A$ (A convexo), así

$$\|2x-(a+b)\|^2 = 4\|x - \tfrac{1}{2}(a+b)\|^2 \geq 4\delta^2 \quad (**)$$

$$\|2(x-\tfrac{1}{2}(a+b))\|^2$$

Luego

$$\|a-b\|^2 \overset{(*)}{=} 2\|x-a\|^2 + 2\|x-b\|^2 - \|(x-a)+(x-b)\|^2 \overset{(**)}{\leq} 2\|x-a\|^2 + 2\|x-b\|^2 - 4\delta^2 \quad (***)$$

Ahora sea $a_n \in A$ con $\|x-a_n\|^2 \leq \delta^2 + \frac{1}{4n^2}$. Se tiene que si $n > m > 1$

$$\|a_m - a_n\|^2 \leq 2\left(\delta^2 + \frac{1}{4n^2}\right) + 2\left(\delta^2 + \frac{1}{4m^2}\right) - 4\delta^2 = \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4m^2} \leq \frac{1}{m^2}$$

Luego $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, H Hilbert y A cerrado, así $\exists\, a \in A$ con $a_n \xrightarrow{\|\,\|} a \in A$.

Así $\|a_n - x\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x-a\|^2 = \delta^2$.

Además a es único ya que si existe otro b $\|a-b\| = 0$ por (***)

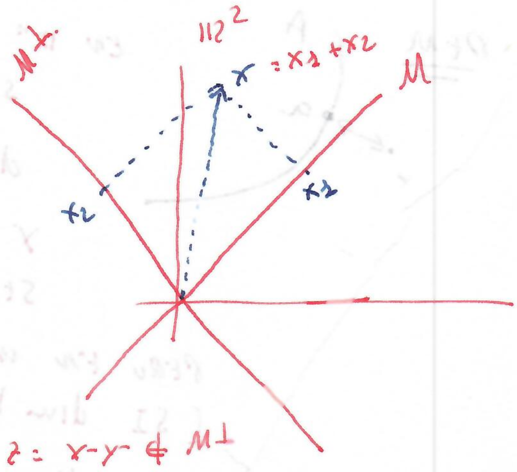
LEMA (para el teorema de Stampacchia) En las hipótesis de la proposición a queda caracterizado por $a \in A$, $\langle x-a, y-a \rangle \leq 0$ $\forall y \in A$

PROPOSICIÓN Sea $M \subseteq H$ un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert.

a) $H = M \oplus M^{\perp}$ (es decir $\forall x \in H$ $\exists!\, x_1 \in M$ y $x_2 \in M^{\perp}$ únicos con $x = x_1 + x_2$.)

b) Si $P_M : H \longrightarrow M$
$x \longrightarrow P_M(x) = x_1$ es una proyección continua

c) $(M^{\perp})^{\perp} = M$.



DEM (EJERCICIO)

a) Sea $x \in H$, si $x \notin M$.

$\exists\, y \in M$ con $\|x - y\| = dis(x, M)$.

Sea $z = x - y$

Así $x = y + (x - y)$

$x - y \in M^{\perp}$ (en otro caso si $z = x - y \notin M^{\perp}$

$\exists\, u \in M$ con $\|u\| = 1$ y $\langle x - y, u\rangle = \alpha \neq 0$

Sea $y + \alpha u \in M$, entonces

$\|x - (y + \alpha u)\|^2 = \|z - \alpha u\|^2 =$

$= \|z\|^2 - \alpha \langle u, z\rangle - \bar{\alpha}\langle z, u\rangle + \alpha\bar{\alpha} =$

$\langle z, u\rangle = \alpha$

$= \|z\|^2 - \alpha\bar{\alpha} - \bar{\alpha}\alpha + \alpha\bar{\alpha} = \|z\|^2 - |\alpha|^2$

lo que contradice que $\|x - y\| = \|z\| = dis(x, M)$

Así $x - y \in M^{\perp}$ y como $M \cap M^{\perp} = \{0\}$.

se tiene que $x = y + z = (x_1 + x_2)$ único.

(Si $x = x_1 + x_2$, $x = y_1 + y_2$ $\Rightarrow$ $\underbrace{(x_1 - y_1)}_{\in M} + \underbrace{(x_2 - y_2)}_{\in M^{\perp}} = 0 \Rightarrow (x_1 - y_1) = (x_2 - y_2) \Rightarrow$ ambos son nulos.

b) $P_M : H \longrightarrow M$, $x \longrightarrow P_M(x) = x_1$ P_M está bien definida y como
$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ (Pitágoras)

$\|P_M(x)\| \leq \|x_1\| \leq \|x\|. \Rightarrow \|P_M\| \leq 1$

Claramente P_M es lineal

c) $M \subseteq (M^{\perp})^{\perp}$ claramente

Si $x \in M^{\perp\perp}$, $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M$, $x_2 \in M^{\perp}$

como $\langle x, x_2\rangle = 0$ y $\langle x_1, x_2\rangle = 0$, $\langle x_2, x_2\rangle = \langle x - x_1, x_2\rangle = 0$
$\Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x \in M$.

EL TEOREMA DE RIESZ

SEA H UN ESPACIO DE HILBERT Y SEA $f \in H'$ UN FUNCIONAL LINEAL Y CONTINUO SOBRE H.

a) EXISTE $a \in H$ TAL QUE $f(x) = \langle x, a \rangle \quad \forall x \in H$.

b) $T: H' \longrightarrow H$
$\quad f \longrightarrow Tf = a$ (CON $f(x) = \langle x, a \rangle \ \forall x \in H$), T ES BIYECTIVA Y SI $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ UNA ISOMETRÍA.

DEM (OBSERVAR LO FÁCIL QUE ES EL DUAL DE UN HILBERT $H' = H$.
- ESTO YA LO CONOCÍAMOS PARA $L_2(\Omega, \mu)$ μ σ-FINITA. COMO $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $(L_2(\Omega,\mu))' = L_2(\Omega,\mu)$.

a) SEA $\ker f = f^{-1}(0) \subseteq H$ SUBESPACIO CERRADO.

SI $f \equiv 0$, SE TOMA $a = 0$

SI $f \neq 0$, $\ker f \subsetneq H$ Y $H = \ker f \oplus (\ker f)^{\perp}$.

SEA $z \in (\ker f)^{\perp}$ CON $\|z\| = 1$

$\forall x \in H$, SE TIENE $f(x)z - f(z)x \in \ker f$.

Y ASÍ $0 = \langle \underbrace{f(x)z - f(z)x}_{\in \ker f}, \underbrace{z}_{\in (\ker f)^{\perp}} \rangle = f(x) - f(z)\langle x, z \rangle$.

$\Rightarrow f(x) = \langle x, \overline{f(z)}z \rangle$.

SI $a = \overline{f(z)}z$ SE TIENE EL RESULTADO

b) $T: H' \longrightarrow H$
$\quad f \longrightarrow Tf = a$ ESTÁ BIEN DEFINIDA, ES INYECTIVA
Y $\forall a \in H$ VIMOS QUE $\langle \ , a \rangle \in H'$ Y QUE $\|\langle \ , a \rangle\| = \|a\|$.

LUEGO T ES UNA ISOMETRÍA

PARA VER QUE T ES LINEAL
SI $Tf = a$ Y $Tg = b$ $\quad \langle \ , a+b \rangle = \langle \ , a \rangle + \langle \ , b \rangle = f + g$

AHORA $Tf = a$ Y $\lambda \in \mathbb{C}$ $\quad \langle \ , \lambda a \rangle = \overline{\lambda} \langle \ , a \rangle$ ASÍ
SI $\lambda \in \mathbb{R}$, T ES LINEAL, UNA ISOMETRÍA

TEOREMAS DE STAMPACCHIA Y DE LAX-MILGRAM. (BREZIS pg 82 y siguient)
($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ↳ (PREMIO ABEL 2003 ó 2004)

DEFINICION SE DICE QUE UNA FORMA BILINEAL
$$a \; H \times H \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ES}$$

a) CONTINUA, SI $\exists M > 0$ TAL QUE
$$|a(x,y)| \le M\|x\|\|y\| \quad \forall x,y \in H$$

b) COERCIVA SI $\exists \alpha > 0$ CON
$$a(x,x) \ge \alpha \|x\|^2 \quad \forall x \in H.$$

TEOREMA (STAMPACCHIA) SEA $a(x,y)$ UNA FORMA BILINEAL CONTINUA Y COERCIVA. SEA K UN CONVEXO, CERRADO NO VACIO: DADO $f \in H'$, $\exists! \, x \in K$ TAL QUE

H ESPACIO DE HILBERT REAL.

$$a(x, y-x) \ge f(y-x) \quad \forall y \in K$$

ADEMAS, SI a ES SIMÉTRICA, ENTONCES x SE CARACTERIZA POR LA PROPIEDAD
$$\begin{cases} x \in K \\ \frac{1}{2}a(x,x) - f(x) = \min_{y\in K} \left\{ \frac{1}{2}a(y,y) - f(y) \right\}. \end{cases}$$

DEM USA EL TEOREMA DE PUNTO FIJO DE BANACH (1920) SI X ES UN ESPACIO MÉTRICO COMPLETO Y $S\,X \to X$ ES UNA APLICACIÓN CONTRACTIVA (es[illegible] $\exists k < 1$ CON $d(S(x),S(y)) < k\, d(x,y)$ $\forall x,y \in S$) ENTONCES S TIENE UN ÚNICO PUNTO FIJO.

COROLARIO (LAX-MILGRAM). SEA $a \; H \times H \to \mathbb{R}$ UNA FORMA BILINEAL CONTINUA Y COERCIVA. ENTONCES $\forall f \in H'$ EXISTE UN ÚNICO $u \in H$ CON
$$a(u,y) = f(y) \quad \forall y \in H.$$

PRUEBA pg 315 L. C. EVANS, E.D.P., Graduate studies in Math. v. 19. - esencialmente usa el teorema de Riesz.

ADEMAS SI a ES SIMÉTRICA, ENTONCES u SE CARACTERIZA POR LA PROPIEDAD
$$u \in H, \; y \; \frac{1}{2}a(u,u) - f(u) = \min_{y\in H} \left\{ \frac{1}{2}a(y,y) - f(y) \right\}.$$

DEM H ES CONVEXO Y CERRADO ASI $\forall y \in H$, $y = (y+u) - u$ con $y+u \in H$. ASI POR EL TEOREMA DE STAMPACCHIA, $a(u,(y+u)-u) = f((y+u)-u)$ etc

ESTE ULTIMO RESULTADO SE USA PARA RESOLVER ECUACIONES LINEALES (ELÍPTICAS) DE 2.º ORDEN EN DERIVADAS PARCIALES

SOLUCIONES DÉBILES EN ESPACIOS DE SOBOLEV.

DEM. (DEL TEOREMA DE STAMPACCHIA).

SI $f \in H'$, EL TEOREMA DE RIESZ $\exists b \in H$ ÚNICO

DE MODO QUE $f(z) = \langle z, b\rangle \quad \forall z \in H$

POR OTRA PARTE $\forall u \in H$ FIJO LA APLICACIÓN

$z \longrightarrow \langle z, u\rangle$ ES UNA FORMA LINEAL Y CONTINUA

ASÍ COMO $a(u, \cdot)$ ES LINEA Y CONTINUA (POR SER a BILINEAL Y CONTINUA)

$\exists Au \in H$ CON $a(u, z) = \langle z, Au\rangle \quad \forall z \in H$.

SEA $A \quad H \longrightarrow H$, $u \longrightarrow Au$. (SI $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ES LINEAL

Y $\|Au\| \leq C\|u\| \quad \forall u \in H$. (DONDE $|a(u,y)| \leq C\|u\|\|y\|$ POR LA CONTINUIDAD DE a)

Y $\langle u, Au\rangle = a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2 \quad \forall u \in H$ (POR SER a COERCIVA)

SEA $\rho > 0$ UNA CONSTANTE (QUE LUEGO FIJAREMOS).

PROBAR QUE

$$\boxed{a(x, y-x) \geq f(y-x) \quad \forall y \in K}$$ TESIS TEOREMA

ES COMO VER QUE

$\langle y-x, Ax\rangle \geq f(y-x) \quad \forall y \in K$

IGUAL A $\langle y-x, Ax\rangle \geq \langle y-x, b\rangle \quad \forall y \in K$

$\Leftrightarrow \langle y-x, Ax\rangle - \langle y-x, b\rangle \geq 0 \quad \forall y \in K$

ES COMO PROBAR

$\Leftrightarrow \langle y-x, Ax-b\rangle \geq 0 \quad \forall y \in K$

$\Leftrightarrow$ ENTONCES $\rho\langle y-x, Ax-b\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle y-x, \rho Ax - \rho b\rangle \geq 0$

$\Leftrightarrow \langle y-x, \rho b - \rho Ax + x - x\rangle \leq 0 \quad \forall y \in K \quad (**)$

SEA $P_K \quad H \longrightarrow K$, $h \longrightarrow P_K h$ ES TAL QUE $\mathrm{dist}(h, K) = \|h - P_K h\|$

ENTONCES SI $x = P_K(\rho b - \rho Ax + x) \in K$ POR EL LEMA DESPUÉS DEL TEOREMA DE LA PROYECCIÓN SOBRE K (DISTANCIA MÍNIMA)

(35)

(**) SI $x = P_K(\rho b - \rho A x + x)$ ENTONCES SE TIENE QUE (**) ES CIERTA Y POR TANTO LA HIPÓTESIS..

SALTAR

LEMA SI $K \subset H$, K CONVEXO Y CERRADO. SON EQUIVALENTES

a) $\forall x \in H \quad \|P_K x - x\| = \operatorname{dist}(x, K)$, $P_K x \in K$

b) $\begin{cases} P_K x \in K \\ \langle x - P_K x, y - P_K x \rangle \le 0 \quad \forall y \in K \end{cases}$

DEM a⇒b). SI $P_K x$ VERIFICA a) ; SEA $y \in K$

$w = (1-t) P_K x + t y$, $t \in [0,1]$, $w \in K$ POR SER K CONVEXO

$\|x - P_K x\| \le \|x - [(1-t) P_K x + t y]\| =$

$= \|(x - P_K x) - t(y - P_K x)\|$.

POR TANTO

$\|x - P_K x\|^2 = \langle x - P_K x, x - P_K x \rangle \le$

$\le \langle (x - P_K x) - t(y - P_K x), x - P_K x - t(y - P_K x) \rangle =$

$= \|x - P_K x\|^2 - 2t \langle x - P_K x, y - P_K x \rangle + t^2 \|y - P_K x\|^2 \quad \forall t \in (0,1]$

$\Rightarrow \quad 2 \langle x - P_K x, y - P_K x \rangle \le t \|y - P_K x\|^2$

LUEGO $\langle x - P_K x, y - P_K x \rangle \le 0 \quad \forall y \in K$

b⇒a) SI $\langle x - P_K x, y - P_K x \rangle \le 0 \quad \forall y \in K \quad \langle x - P_K x, y - P_K x \rangle - \|x - y\|^2 \le 0$

$\Rightarrow \quad \|P_K x - x\|^2 - \|y - x\|^2 = 2 \langle x - P_K x, y - P_K x \rangle \quad \forall y \in K$

LO QUE PRUEBA QUE

$\|P_K x - x\| \le \|y - x\| \quad \forall y \in K$

Y ASÍ $P_K x$ ES EL PUNTO DE K MÁS PRÓXIMO A x

(*) $\exists\, x = P_K(\rho b - \rho A x + x)$.

SEA $S: K \longrightarrow K$

$x \longrightarrow Sx = P_K(\rho b - \rho Ax + x)$.

VEAMOS QUE SI ρ ES SUFICIENTEMENTE PEQUEÑO ENTONCES

(•) Sx ES CONTRACTIVA (COMO $K \subseteq H$ K CERRADO EN UN HILBERT K ES COMPLETO).

LEMA: $P_K: H \longrightarrow K$ VERIFICA QUE

$$\| P_K x_1 - P_K x_2 \| \leq \| x_1 - x_2 \| \quad \forall x_1, x_2 \in K.$$

DEM: SI $u_1 = P_K x_1$ Y $u_2 = P_K x_2$

ASÍ POR EL LEMA ANTERIOR

(A) $\langle x_1 - u_1, y - u_1 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K$ *

(B) $\langle x_2 - u_2, y - u_2 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K$

SI EN (A) PONEMOS $y = u_2$ Y EN (B) $y = u_1$

$$\begin{array}{l} \langle x_1 - u_1, u_2 - u_1 \rangle \\ + \\ \langle x_2 - u_2, u_1 - u_2 \rangle \\ \hline \end{array}$$

$\langle x_1 - u_1, u_2 - u_1 \rangle - \langle x_2 - u_2, u_2 - u_1 \rangle =$

$= \langle (x_1 - x_2) + (u_2 - u_1), u_2 - u_1 \rangle =$

$= \langle x_1 - x_2, u_2 - u_1 \rangle + \| u_2 - u_1 \|^2 \leq 0$

ASÍ $\| u_2 - u_1 \|^2 \leq \langle x_1 - x_2, u_1 - u_2 \rangle \underset{\text{CAUCHY-SCHWARZ}}{\leq} \| x_1 - x_2 \| \, \| u_1 - u_2 \|$

POR TANTO $\| u_2 - u_1 \| \leq \| x_1 - x_2 \|$.

POR EL LEMA

$$\| Sx_1 - Sx_2 \| = \| P_K(\cancel{\rho b} - \rho Ax_1 + x_1) - (P_K(\cancel{\rho b} - \rho Ax_2 + x_2) \| \underset{\text{lema}}{\leq}$$

$$\leq \| (x_1 - x_2) - \rho (Ax_1 - Ax_2) \|.$$

Y ASÍ $\| Sx_1 - Sx_2 \|^2 \leq \| x_1 - x_2 \|^2 - 2\rho \langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle + \rho^2 \| Ax_1 - Ax_2 \|^2$

$\leq \| x_1 - x_2 \|^2 (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2)$ ASÍ CON $0 < \rho < \frac{2\alpha}{C^2}$

USANDO QUE $a(x,y)$ ES COERCITIVA, A ES CONTINUA.

SALE EL COEFICIENTE MENOR QUE 1

AHORA SE PUEDE APLICAR EL TEOREMA DE BANACH DE PUNTO FIJO. NO PRUEBO LA 2ª PARTE DEL TEOREMA VER BREZIS PAG 84

L. Abellanas y A. Galindo, Espacios de Hilbert, (1987) Eudema Univ.

Pg 130.

EN ℓ^2 SE DEFINEN FORMALMENTE VARIOS OPERADORES LINEALES IMPORTANTES EN FÍSICA CUÁNTICA:

OPERADOR DESTRUCTOR. $a \quad \ell_2 \longrightarrow \ell_2$

$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots) \longrightarrow a\alpha = (\alpha_1, \sqrt{2}\alpha_2, \sqrt{3}\alpha_3, \ldots, \sqrt{n+1}\,\alpha_{n+1})$

$\|a\alpha\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n^2$ OPERADOR LINEAL NO ACOTADO

$\|a e_n\|_2^2 = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ y $\|e_n\|_2^2 = 1.$

OPERADOR CREADOR $a^+ : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$

$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots) \longrightarrow a^+\alpha = (0, \alpha_0, \sqrt{2}\alpha_1, \ldots, \sqrt{n}\,\alpha_{n-1})$.

TAMBIÉN LINEAL, PERO NO ACOTADO

OPERADOR NÚMERO $N : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$

$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots) \longrightarrow N\alpha = (0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \; n\alpha_n \ldots)$

LINEAL PERO NO ACOTADO.

Pg 138

$U_a \quad L_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n) \quad a \in \mathbb{R}^n$

$f \longrightarrow U_a f(x) = f(x-a)$ POR EL TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE ES UNA ISOMETRÍA

$V_a \quad L_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$

$f \longrightarrow e^{-i(a,x)} f(x) \quad (a,x) = \sum a_i x_i.$

¿TRANSFORMADA DE FOURIER?. ES DE NUEVO UNA BIYECCIÓN ISOMÉTRICA

En Mecánica Cuántica U_a representa la acción de una traslación en la posición. V_a la acción sobre funciones de onda de una traslación de momentos.

Y (*) $U_a V_b = e^{i(a,b)} V_b U_a$ es la expresión finita de Weyl para las reglas de conmutación entre posiciones y momentos conjugados.

Pj 134

SEA R UNA ROTACION EN $\mathbb{R}^3$ alrededor del origen.

Y SEA $U(R)$ $L_2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$

$$f \longrightarrow U(R)f = f(R^{-1}x)$$

POR EL TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE $\|U(R)\| = 1$ ES UNA ISOMETRIA

EN MECANICA CUANTICA $U(R)$ representa la acción de una rotación sobre las funciones de onda.

Pj 134

SEA $H = L^2(\mathbb{R}^n)$, $S(\mathbb{R}^n) \equiv$ FUNCIONES DE $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ TALES QUE ELLAS Y SUS DERIVADAS DECRECEN ASINTOTICAMENTE A CERO MAS DEPRISA QUE EL INVERSO DE UN POLINOMIO

(Ejemplo $e^{-\langle x, x \rangle}$)

SOBRE $S(\mathbb{R}^n)$ SE DEFINEN

$$Q_j \; f \longrightarrow x_j f$$

$$\text{y} \quad P_k \; f \longrightarrow -i \frac{\partial}{\partial x_k} f$$

ES INMEDIATO PROBAR QUE Q_j Y P_k NO SON ACOTADOS

SOBRE $S(\mathbb{R}^n)$ ES ELEMENTAL COMPROBAR QUE

$$[Q_j, P_k] \overset{DEF}{\equiv} Q_j P_k - P_k Q_j = i \delta_{jk} 1_P$$

QUE SON LAS FAMOSAS RELACIONES DE CONMUTACION DE HEISENBERG ENTRE LOS OPERADORES DE POSICION Q_j Y LOS MOMENTOS P_k