LOS GRANDES TEOREMAS DEL ANÁLISIS FUNCIONAL

EL TEOREMA DE HAHN-BANACH.

EN LOS CURSOS DE TOPOLOGÍA SE ESTUDIAN RESULTADOS COMO LOS QUE SIGUE

LEMA DE URYSOHN (1924) SEA X UN ESPACIO MÉTRICO Y SEAN C_1 Y C_2 CERRADOS DE X NO VACÍOS CON $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, ENTONCES $\exists\, f : X \longrightarrow [0,1]$ CONTINUA CON $f_{|C_1} \equiv 0$ Y $f_{|C_2} \equiv 1$.

TEOREMA DE EXTENSIÓN DE TIETZE SEA X UN ESPACIO MÉTRICO, SI $C \subseteq X$ ES UN CONJUNTO CERRADO DE X NO VACÍO Y $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ ES CONTINUA $\exists\, F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA TAL QUE

$$F_{|C} = f$$

EL TEOREMA DE HAHN-BANACH ES A ESPACIOS DE BANACH LO QUE EL LEMA DE URYSOHN Y EL TEOREMA DE TIETZE PARA ESPACIOS MÉTRICOS, EN EL CASO DE ESPACIOS DE BANACH LAS FUNCIONES QUE INTERVIENEN, ADEMÁS DE CONTINUAS SON LINEALES.

DEFINICIÓN SEA X UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE UN CUERPO $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Ó $\mathbb{C}$. TODA APLICACIÓN

$$p : X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ QUE VERIFICA}$$

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in X \text{ Y } \forall \lambda > 0.$$

$$\text{Y } p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$$ SE LLAMA UNA SEMINORMA

EJEMPLOS SI $(X, \| \ \|)$ ES UN ESPACIO NORMADO, LA NORMA $\| \ \|$ ES MUCHO MÁS QUE UNA SEMINORMA.

Teorema de Hahn-Banach (forma analítica; 1927 - Hahn, 1929 - Banach).

Sea X un espacio vectorial real y sea $M \subseteq X$ un subespacio vectorial. Sea

$$p: X \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

una seminorma sobre X. Si

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

es una aplicación lineal, tal que $|f(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in M$. Entonces existe una aplicación lineal

$$F: X \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $F(x) = f(x)$ $\forall x \in M$ y $|F(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in E$.

Observación:
- •) Esta forma tan general se usa para probar los teoremas de extensión de funcionales tanto sobre espacios de Banach como sobre espacios localmente convexos.
- •) En la prueba se usa el lema de Zorn.
- •) Más interesante que la prueba son sus aplicaciones.

Teorema Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio normado sobre un cuerpo $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$. Si $M \subseteq X$ un subespacio vectorial y sea

$$f: M \longrightarrow \mathbb{K}$$

lineal y acotada (es: $|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$ $\forall x \in M$). Entonces $\exists F \in X'$ con $F|_M = f$ y $\|F\| = \|f\|$.

Dem: Veremos el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; si tomo $p(x) = \|f\| \|x\|$ $\forall x \in X$, p es una seminorma y aplicando el teorema de H-B. $\exists F: X \to \mathbb{R}$ lineal con $F|_M = f$ y $F(x) \leq \|f\| \|x\|$ $\forall x \in X$.

Así como $F(-x) = -F(x) \leq \|f\| \|-x\| = \|f\| \|x\| \Rightarrow$
$|F(x)| \leq \|f\| \|x\|$ $\forall x \in X \Rightarrow F \in X'$ y $\|F\| \leq \|f\|$.

Como $\|F\| = \sup\{|F(x)| : \|x\| \leq 1\} \geq \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1 \text{ y } x \in M\} = \|f\|$. Así $\|F\| = \|f\|$ c.q.d.

COROLARIO Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio normado.

a) Para todo $x \in X$ existe $f \in X'$ con $\|f\| = 1$ y $f(x) = \|x\|$

b) Para todo $x \in X$ $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in \overline{B}_{X'}\}$.

DEM a) Sea $f\ [x] \longrightarrow \mathbb{K}$
$tx \longrightarrow f(tx) = t\|x\| \quad t \in \mathbb{K}$.

f lineal y continua
$|f(tx)| = |t\|x\|| = \|tx\|$ así $\|f\| = 1$.

Existe $F \in X'$, con $\|F\| = 1$ y $F_{|[x]} = f$

así $F(x) = \|x\|$

b) Si $f \in B_{X'}$ entonces $|f(x)| \leq \|x\|$

Por a) $\exists f \in \overline{B}_{X'}$ con $f(x) = \|x\|$.

Luego $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in \overline{B}_{X'}\}$. $\overset{\text{OBSER}}{=} \sup\{|f(x)| : f \in B_{X'}\}$

PROPOSICIÓN Se $(X, \|\ \|)$ un espacio normado y sea X'' su espacio bidual (e.d. $X'' \overset{\text{DEF}}{=} (X')'$)

Sea $J\ X \longrightarrow X''$
$x \longrightarrow J(x)(x') \overset{\text{DEF}}{=} x'(x) \quad \forall x' \in X'$

Se tiene que J es un operador lineal isométrico.

DEM $\forall x', y' \in X'$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ (veamos que J está bien definida)

$J(x)(x' + \lambda y') = x' + \lambda y'(x) = x'(x) + \lambda y'(x) = J(x)(x') + \lambda J(x)(y')$.

así $J(x)$ es lineal y

$|J(x)(x')| = |x'(x)| \leq \|x'\|\ \|x\|$, luego $J(x) \in (X')'$ y $\|J(x)\| \leq \|x\|$.

J es lineal $\forall x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$

$J(x + \lambda y)(z') = z'(x + \lambda y) = z'(x) + \lambda z'(y) = J(x)(z') + \lambda J(y)(z') =$
$= (J(x) + \lambda J(y))(z')$.

J es una isometría. Dado $x \in X$, existe $x' \in X'$, $\|x'\| = 1$.

con $|x'(x)| = \|x\|$ así,

$$\left.\begin{array}{l} |J(x)(x')| = |x'(x)| = \|x\| \\ \|J(x)\| = \sup\{|J(x)(x')| : x' \in \overline{B}_{X'}\} \leq \|x\| \end{array}\right\} \Rightarrow \|J(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in X.$$

DEF Un espacio normado $(X, \|\ \|)$ se llama reflexivo si $J\ X \longrightarrow X''$ es biyectiva y por tanto X e X'' son isométricos. (*) ver detrás

(*) SEA W LA TOPOLOGIA SOBRE X (ESPACIO DE BANACH), QUE HACE CONTINUAS A LAS APLICACIONES DE X'

(X, W) SE LLAMA TOPOLOGIA DEBIL

SE PUEDE PROBAR QUE

$\overline{B_X}$ ES W-COMPACTA $\Leftrightarrow$

X ES REFLEXIVO

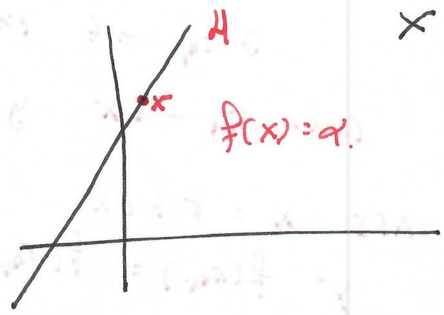
TEOREMA DE HAHN-BANACH. (FORMA GEOMÉTRICA).

EL TEOREMA DE HAHN-BANACH, PERMITE UNA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA SIMILAR A LA DEL LEMA DE URYSOHN.

DEF UN HIPERPLANO (AFÍN) DE UN ESPACIO NORMADO X ES TODO CONJUNTO DE LA FORMA

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}.$$

DONDE $f \in X'$ Y $\alpha \in \mathbb{K}$



OBSERVACIÓN LA NOCIÓN DE HIPERPLANO COINCIDE CON LA DE LA GEOMETRÍA EUCLÍDEA, ASÍ SI $x_0 \in X$ CON $f(x_0) = \alpha$ ENTONCES

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\} = \{x_0\} + \ker f.$$

OBSERVACIÓN POR RAZONES GEOMÉTRICAS Y DE SIMPLICIDAD SÓLO VAMOS A TRATAR EL CASO $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (AUNQUE SE PUEDE HACER EN GENERAL).

PROPOSICIÓN EL HIPERPLANO $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$. ES CERRADO SI Y SÓLO SI f ES CONTINUA.

DEM $\Leftarrow$) SI $\alpha \in \mathbb{K}$ $\{\alpha\}$ ES CERRADO EN $\mathbb{K}$ Y ASÍ $f^{-1}(\{\alpha\}) = H$ ES CERRADO POR SER f CONTINUA.

$\Rightarrow$) SI H ES CERRADO, SEA $x_0 \in H$ Y $H_1 = H - \{x_0\}$.

ASÍ $\forall y \in H - \{x_0\}$, $y = x - x_0$ CON $x \in H$ Y $f(y) = f(x - x_0) = 0$, $H_1 \subseteq \ker f$.

ADEMÁS SI $y \in \ker f$, $f(y + x_0) = \alpha$, LUEGO $H_1 = \ker f$

LUEGO COMO H_1 ES CERRADO, $\ker f$ ES CERRADO POR TANTO f ES CONTINUA.

EJERCICIO SEA $f\ X \to \mathbb{K}$ (X ESPACIO NORMADO), f LINEAL SON EQUIVALENTES

a) f ES CONTINUA
b) f ESTÁ ACOTADA
c) $\ker f$ ES CERRADO.

DEM: Si $\ker f$ es cerrado veamos que f es continua

Si $f \neq 0$, $\exists x \in X$ con $f(x) = 1$ (si $f(x) \neq 1$, sea $\frac{x}{f(x)}$.)

$X = \ker f \oplus [x]$.

Si $y \in X$ $\quad y = \underbrace{(y - f(y)x)}_{\in \ker f} + \underbrace{f(y)x}_{\in [x]}$ $\quad$ y $\ker f \cap [x] = \{0\}$

Sea $x_n \xrightarrow{\| \|} a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$.

Veremos que no existe $f(x_{n_k}) \not\to f(a)$

Sea $x_n = r_n + t_n x$ con $r_n \in \ker f$ y $t_n x \in [x]$

$\exists\, t_{n_k} \to t$ en K.

Como $x_n \to a$ y $t_{n_k} x \to tx \Rightarrow r_{n_k} \to r \in \ker f$ ($\ker f$ cerrado)

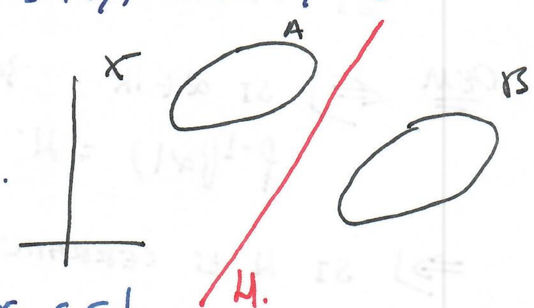
Así $a = r + tx$.

y $f(x_{n_k}) = f(r_{n_k}) + t_{n_k} f(x) = t_{n_k} \to t = f(r + tx) = f(a)$ c.q.d.

DEF Dados $A, B \subseteq X$ dos subconjuntos de un espacio normado. Se dice que hiperplano $M = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$

a) separa A y B en sentido amplio si $f(x) \leq \alpha \leq f(y)$ $\forall x \in A$ y $\forall y \in B$.

b) separa A y B estrictamente si $\exists \varepsilon > 0$ con $f(x) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq f(y)$ $\forall x \in A$ y $\forall y \in B$.

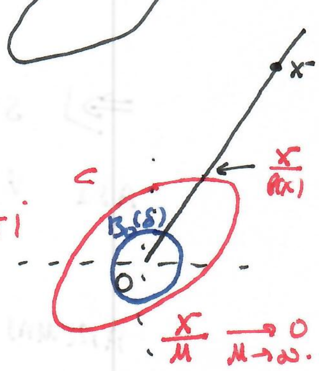


DEFINICIÓN Sea $C \subseteq X$ un conjunto abierto y convexo del espacio normado X con $0 \in C$. Se define la aplicación

$\rho: X \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \rho(x) = \inf\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\}$

Al funcional ρ se le llama funcional de Minkowski



PRÁCTICA

PROPOSICIÓN Sea $C \subseteq X$ abierto, convexo con $0 \in C$ del espacio normado X. Sea ρ el funcional de Minkowski asociado. Entonces

a) $\rho(0)=0$ y $\exists M>0$ tal que $0 \le \rho(x) \le M\|x\|$ $\forall x \in X$.

b) $\forall \lambda \ge 0$ y $\forall x \in X$ $\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x)$.

c) $C = \{x \in X : \rho(x) < 1\}$

d) $\forall x, y \in X$ $\rho(x+y) \le \rho(x) + \rho(y)$.

(EJERCICIO).

ρ SEMI-NORMA

DEM a) $\rho(0)=0$ obvio de la definición de ρ y ya que $0 \in C$.

Además C es abierto, $\exists r>0$ con $\overline{B_0(r)} \subseteq C$. Así

$\forall x \in X$ $\quad \dfrac{x}{\frac{\|x\|}{r}} = r\dfrac{x}{\|x\|} \in \overline{B_0(r)} \subseteq C$

$\rho(x) \le \frac{1}{r}\|x\|$. c.q.d.

OBSERV. Si X tiene un orden y C es absoluto, sólido, es decir si $|x| \le |y|$, $y \in C$ $\Rightarrow x \in C$ entonces ρ es una norma de retículo: si $|x| \le |y| \Rightarrow \rho(x) \le \rho(y)$.

b) $\rho(\lambda x) = \inf\{\alpha > 0 : \frac{\lambda x}{\alpha} \in C\} = \lambda \inf\{\frac{\alpha}{\lambda} > 0 : \frac{x}{\frac{\alpha}{\lambda}} \in C\} =$

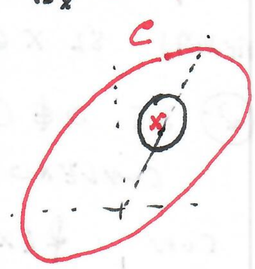
$= \inf\{\lambda \frac{\alpha}{\lambda} > 0 : \frac{x}{\frac{\alpha}{\lambda}} \in C\} = \lambda \rho(x)$.

c) •) Si $x \in C$ $\frac{x}{1} \in C$ y así $\rho(x) \le 1$

Como C es abierto $\exists \varepsilon > 0$ con $B_x(\varepsilon) \subseteq C$

Así $x + \frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|} = \left(1 + \frac{\varepsilon/2}{\|x\|}\right)x \in B_x(\varepsilon) \subseteq C$

y $\dfrac{x}{\frac{1}{1+\frac{\varepsilon/2}{\|x\|}}} \in C \Rightarrow \rho(x) \le \dfrac{1}{1+\frac{\varepsilon/2}{\|x\|}} < 1$.



••) Ahora si x verifica que $\rho(x) < 1$

Así $\frac{x}{1} \in C$ por definición de ρ.

d) Sea $x, y \in X$ por la propiedad b) y c) $\exists \varepsilon > 0$ con $\frac{x}{\rho(x)+\varepsilon} \in C$ y $\frac{y}{\rho(y)+\varepsilon} \in C$. Por ser C convexo

$\dfrac{tx}{\rho(x)+\varepsilon} + \dfrac{(1-t)y}{\rho(y)+\varepsilon} \in C$ $\forall t \in [0,1]$, en particular para $t = \dfrac{\rho(x)+\varepsilon}{\rho(x)+\rho(y)+2\varepsilon}$

Así $\dfrac{\cancel{\rho(x)+\varepsilon}}{(\rho(x)+\rho(y)+2\varepsilon)\cancel{(\rho(x)+\varepsilon)}}x + \dfrac{\cancel{\rho(y)+\varepsilon}}{(\rho(x)+\rho(y)+2\varepsilon)\cancel{(\rho(y)+\varepsilon)}}y \in C \Rightarrow \rho(x+y) \le \rho(x)+\rho(y)+2\varepsilon$

Como lo anterior es cierto $\forall \varepsilon' < \varepsilon$, se sigue que $\rho(x+y) \le \rho(x) + \rho(y)$.

LEMA Sea $C \subset X$ un abierto convexo no vacío del espacio normado X y sea $x_0 \in X - C$, entonces existe $f \in X'$ tal que

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in C.$$

En particular el hiperplano $H = \{x \in X : f(x) = f(x_0)\}$ separa $\{x_0\}$ y C.

DEM

1. Supongamos que $\boxed{0 \in C.}$

Sea p el funcional de Minkowski asociado.

Así $p(x_0) \geq 1$ ya que $x_0 \notin C$.

Sea $M = [x_0]$ y sea $g(\lambda x_0) = \lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\left(|g(\lambda x_0)| \leq \frac{\|\lambda x_0\|}{\|x_0\|}\right)$

Ahora $g(\lambda x_0) \leq p(\lambda x_0)$ $\begin{cases} \text{si } \lambda \geq 0 & p(\lambda x_0) = \lambda p(x_0) \geq \lambda \\ \text{si } \lambda < 0 & g(\lambda x_0) < 0 \leq p(\lambda x_0) \end{cases}$

g está acotada por $\frac{1}{\|x_0\|}$.

Ahora por el teorema de Hahn-Banach $\exists f$ aplicación

$f: X \to \mathbb{R}$ lineal y con

$f|_M = g$ y $f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$.

f está acotada y por tanto es continua

$p(x) \leq M \|x\| \quad \forall x \in X$ (Prop anterior a) para cierto M.

y como $|f(x)| = |f(-x)| \leq M \|x\| \quad \forall x \in X$

Además si $x \in C$ $\quad f(x) \leq p(x) < 1 = f(x_0)$.

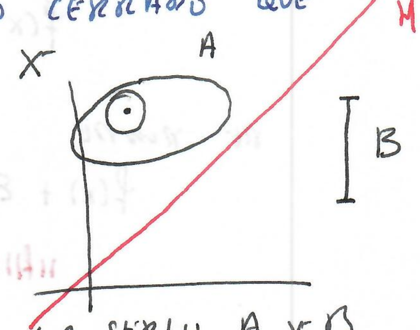
2. Si $0 \notin C$, sea $y_0 \in C$ y sea $C_1 = C - \{y_0\}$ abierto convexo con $0 \in C_1$ y $x_0 - y_0 \notin C_1$, así $\exists f \in X'$ con $f(x - y_0) < f(x_0 - y_0) \quad \forall x \in C$ (según la 1ª parte)

Así $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in C$. c.q.d.

5º

TEOREMA (DE HAHN-BANACH EN FORMA GEOMÉTRICA 1º)

SEAN $A, B \subseteq X$ DOS SUBCONJUNTOS CONVEXOS NO VACÍOS Y DISJUNTOS DEL ESPACIO NORMADO X. SI A ES ABIERTO EXISTE UN HIPERPLANO CERRADO QUE SEPARA A Y B.



DEM SEA $C = A - B = \bigcup_{y \in B} (A - \{y\})$

CADA $A - \{y\}$ ES CONVEXO Y ABIERTO. ASÍ C ES ABIERTO POR SER UNIÓN DE ABIERTOS Y ES CONVEXO POR SERLO A Y B

$(x, y) \in C$ $\quad x = a_1 - y_1 \quad y = a_2 - y_2$

$\lambda x + (1-\lambda) y = \lambda a_1 + (1-\lambda) a_2 - (\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2)$ $\quad \lambda a_1 + (1-\lambda) a_2 \in A$, $\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \in B$)

$0 \notin C$ YA QUE $A \cap B = \emptyset$, ASÍ POR EL LEMA PRECEDENTE $\exists f \in X'$ CON $f(x) < 0 = f(0) \quad \forall x \in C$

$f(x) = f(a - y) < 0 \implies f(a) < f(y) \quad \forall a \in A, \forall y \in B$.

SI SE FIJA AHORA $\alpha \in \mathbb{R}$ CON

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y)$$

SE SIGUE QUE EL HIPERPLANO $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$, CERRADO POR SER f CONTINUA, SEPARA A Y B

TEOREMA (DE HAHN-BANACH EN FORMA GEOMÉTRICA 2º)

PRÁCTICA

SEAN $A, B \subseteq X$ DOS SUBCONJUNTOS CONVEXOS NO VACÍOS Y DISJUNTOS DEL ESPACIO DE NORMADO X. SUPONGAMOS QUE A ES CERRADO Y B COMPACTO. ENTONCES EXISTE UN HIPERPLANO CERRADO DE X QUE SEPARA A Y B ESTRICTAMENTE.

DEM UN ESPACIO MÉTRICO ES NORMAL ASÍ PARA CIERTO $\varepsilon > 0$

$A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon)$ Y $B_\varepsilon = B + B(0, \varepsilon)$

SON ABIERTOS, UNIÓN DE ABIERTOS, CONVEXOS, A, B Y $B(0,\varepsilon)$ LO SON, DE MODO QUE $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$

EN OTRO CASO $\forall \frac{1}{n} \; \exists x_n \in A_{1/n} \cap B_{1/n}$.

ASÍ $x_n = a_n + r_n = b_n + s_n$ $\quad$ B COMPACTO PODEMOS SUPONER $b_n \to b \in B$ Y COMO $s_n, r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$a_n + r_n \to b \in B$, $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\implies a_n \to b \in A$, POR SER A CERRADO, ASÍ $b \in A \cap B$!!

(CONTRADICCIÓN)

Por el teorema anterior existe $f \in X'$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ con $H = \{x : f(x) = \alpha\}$ separa A_ε y B_ε, así

$$f(x+\varepsilon z) \le \alpha \le f(y+\varepsilon z) \quad \forall x \in A,\ y \in B \text{ y } z \in B(0,1)$$

de donde

$$f(x) + \varepsilon \|f\| \le \alpha \le f(y) - \varepsilon \|f\|.$$

$\|f\| = \sup\{f(z) : z \in B_X\}$

Así $f(x) \le \alpha - \varepsilon\|f\| < \alpha < \alpha + \varepsilon\|f\| \le f(y)$ $\forall x \in A$ y $\forall y \in B$.

Lo que prueba el resultado.

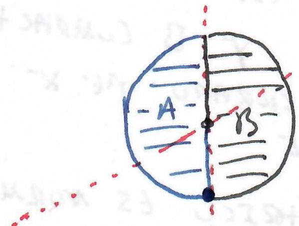
OBSERVACIÓN: La forma geométrica del teorema de Hahn-Banach es equivalente al teorema de Hahn-Banach, aunque sólo hayamos probado una implicación.

Ejemplo en $\mathbb{R}^2$

$$A = \{x^2+y^2 \le 1 \text{ y } x<0\} \cup \{(x,y) : x=0,\ 0 \le y \le 1\}$$

$$B = \{x^2+y^2 \le 1 \text{ y } x>0\} \cup \{(x,y) : x=0,\ -1 \le y < 0\}$$

A y B son convexos, disjuntos (ni abiertos ni cerrados) que no se pueden separar por un hiperplano en sentido estricto.



$x=0$ separa, pero no en sentido estricto.