EL TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA

LAS FUNCIONES HOLOMORFAS DE $\mathbb{C}$ EN $\mathbb{C}$ VERIFICAN UN TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA. VEAMOS EN QUE CONDICIONES SE TRASLADA ESTA PROPIEDAD AL CAMPO DE LOS ESPACIOS DE BANACH.

TEOREMA (DE LA APLICACIÓN ABIERTA) SEAN X E Y DOS ESPACIOS DE BANACH. Y SEA $T: X \to Y$ UN OPERADOR LINEAL, CONTINUO Y SUPRAYECTIVO, ENTONCES $\exists c > 0$ CON

$$T(B_X(0,1)) \supset B_Y(0,c).$$

OBSERVACIÓN LA PROPIEDAD ANTERIOR NOS DICE QUE T TRANSFORMA ABIERTOS DE X EN ABIERTOS DE Y.

DEM SEA $G \subseteq X$ ABIERTO Y SEA $y_0 = Tx_0$, $x_0 \in G$. SEA $y_0 \in T(G)$, ASÍ $\exists x_0 \in G$ CON $T(x_0) = y_0$

$\exists r > 0$ CON $x_0 + B(0,r) \subseteq G$

ASÍ $T(x_0 + B(0,r)) = T(x_0) + r\,T(B(0,1)) \supseteq y_0 + r B_Y(0,c)$

ASÍ $y_0 + r B_Y(0,c) = B_Y(y_0, rc) \subseteq T(G)$.

PRÁCTICA

COROLARIO SI $T: X \to Y$, X E Y BANACH, ES UN OPERADOR LINEAL CONTINUO Y BIYECTIVO, ENTONCES $T^{-1}: Y \to X$ ES CONTINUA (E.D. T ES UN ISOMORFISMO)

DEM POR EL TEOREMA ANTERIOR $\exists c > 0$ CON

$$T^{-1}(B_Y(0,c)) \subseteq B_X(0,1).$$

ES DECIR $\|T^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{c}$ $\forall y \in B_Y(0,1)$.

LUEGO T^{-1} ESTÁ ACOTADA Y POR TANTO ES CONTINUA.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA

LA HAREMOS EN DOS ETAPAS.

1º) SEA $T: X \to Y$ T OPERADOR LINEAL Y SUPRAYECTIVO. ENTONCES $\exists c > 0$ TAL QUE $\overline{T(B(0,1))} \supseteq B(0, 2c)$.

SEA $Y_n = n\,\overline{T B(0,1)}$ COMO T ES SUPRAYECTIVA SE TIENE QUE $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B(0,n))} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$.

CADA Y_n ES CERRADO; ASÍ POR EL LEMA DE BAIRE EXISTE UN Y_{n_0} CON INTERIOR NO VACÍO ($\overset{\circ}{Y}_{n_0} \neq \emptyset$)

COMO $\overset{\circ}{\overline{T B(0, r_0)}} = r_0 \left(\overset{\circ}{\overline{T B(0,1)}}\right)$

$\exists\, y_0 \in Y$ Y $c > 0$ TALES QUE

$$B(y_0, 2c) \subset \overline{T(B(0,1))}$$

EN PARTICULAR y_0 Y $-y_0 \in \overline{T(B(0,1))}$

($\exists (x_n) \in B(0,1)$ CON $T(x_n) \longrightarrow y_0$

COMO $(-x_n) \in B(0,1)$ Y $-T(x_n) \longrightarrow -y_0 \in \overline{T(B(0,1))}$.

ASÍ SUMANDO $y_0 + B(0,2c) - y_0$ SE SIGUE QUE

$$B(0,2c) \subset \overline{T(B(0,1))} + \overline{T(B(0,1))}$$

AHORA COMO $\overline{T B(0,1)}$ ES CONVEXO, POR SERLO $B(0,1)$ Y T LINEAL (ASÍ $T(B(0,1))$ ES CONVEXO Y TAMBIÉN SU ADHERENCIA) POR TANTO $\overline{TB(0,1)} + \overline{TB(0,1)} = 2\,\overline{T(B(0,1))}$

Y ASÍ $\frac{1}{2} B_Y(0,2c) \subseteq \overline{T(B(0,1))}$.

2:] SEA $T\ X \longrightarrow Y$ UN OPERADOR LINEAL Y CONTINUO. QUE VERIFICA QUE $\exists c > 0$ CON $B_Y(0,2c) \subseteq \overline{T(B(0,1))}$ ENTONCES $T(B(0,1)) \supset B_Y(0,c)$

DEM SEA $y \in Y$ FIJO CON $\|y\| < c$.

VAMOS A ENCONTRAR $x \in X$, $\|x\| < 1$ Y $Tx = y$

(ASÍ $B_Y(0,c) \subseteq T(B(0,1))$ C.Q.D.)

POR LA HIPÓTESIS $\forall \varepsilon > 0$ $\exists z \in X$ $\|z\| < 1/2$ CON $\|y - Tz\| < \varepsilon/2$

($\|y\| < c$, ASÍ $2y \in B(0,2c) \subseteq \overline{T B(0,1)}$, ASÍ $\exists z$, $\|z\| < 1$ CON $\|2y - T(z)\| = 2\|y - T(\frac{z}{2})\| < \varepsilon$

tomando $\varepsilon = \varepsilon_1$: $\exists z_1 \in X$, $\|z_1\| < 1/2$ y $\|y - T z_1\| < c/2$ (10°)

aplicando el mismo procedimiento a $y - T z_1$, $\|y - T z_1\| < c/2$

con $\varepsilon = \frac{c}{2}$ $\exists z_2 \in X$ $\|z_2\| < \frac{1}{2^2}$ y $\|y - T z_1 - T z_2\| < \frac{c}{2^2}$

Así por recurrencia se construye $(z_n) \subseteq B_X(0,1)$ con

$\|z_n\| < \frac{1}{2^n}$ y $\|y - T(z_1 + \cdots + z_n)\| < \frac{c}{2^n}$ $\forall n$.

La sucesión $x_n = z_1 + \cdots + z_n$ es de Cauchy

$$\|x_n - x_m\| \leq \sum_{l=n+1}^{m} \|z_l\| \leq \sum_{l=n+1}^{m} \frac{1}{2^l} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

Sea $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, por ser T continua

$$\left.\begin{array}{ccc} y - T(x_n) & \longrightarrow & y - T(x) \\ \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \\ 0 & & \end{array}\right\} \text{ así } y = T(x)$$

Además $\big|\|x\| - \|x_n\|\big| \leq \|x - x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} z_j \quad y \quad \|x\| = \|\sum z_j\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1$$

Así $\|x\| < 1$ c.q.d.

Práctica

Corolario Sean X, Y espacios de Banach y $T: X \to Y$, lineal continua y biyectiva, entonces T es un isomorfismo

ya visto antes.

El siguiente teorema de la gráfica cerrada es equivalente al de la aplicación abierta, aunque sólo veremos una implicación.
Suele ser útil para comprobar si una aplicación lineal entre espacios de Banach es continua o no.

Teorema (de la gráfica cerrada). Sean X, Y dos espacios de Banach y sea $T: X \to Y$ lineal. Sea $G(T) = \{(x, T(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ gráfica de T. Si $G(T)$ es un cerrado de $X \times Y$ (i.e. si $x_n \to x$ y $T(x_n) \to y \Rightarrow y = T(x)$), entonces T es continua.

Dem. Observemos que si T es continua $\Rightarrow$ $G(T)$ es cerrado.

Ejemplo $I: (C[0,1], \|\cdot\|_1) \longrightarrow (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ sabemos que no es continua
pero es cerrada si $\begin{cases} x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x \\ x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} y \end{cases}$ $x_n - y \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} 0$ uniformemente $\Rightarrow \int_0^1 |x_n - y| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} y$ y así $y = x$

SEA $\| \ \|_X$ LA NORMA DE X Y SE DEFINE

$$\|x\|_1 \overset{\text{DEF}}{=} \|x\|_X + \|Tx\|_Y \qquad x \in X$$

CLARAMENTE $\| \ \|_1$ ES UNA NORMA SOBRE X

COMO $G(T)$ ES CERRADO $\Rightarrow$ $(X, \| \ \|_1)$ ES BANACH.

SI $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ES $\| \ \|_1$ - CAUCHY ENTONCES

$$\|x_n - x_m\|_1 = \|x_n - x_m\|_X + \|Tx_n - Tx_m\|_Y \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

ASÍ $\exists\, x \in X$ e $y \in Y$ CON $\begin{cases} \|x_n - x_m\|_X \le \|x_n - x_m\|_1 \\ \|Tx_n - Tx_m\|_Y \le \|x_n - x_m\|_1 \end{cases}$

$$x_n \xrightarrow{\| \ \|_X} x$$

$$T x_n \xrightarrow{\| \ \|_Y} y \quad (= T(x) \text{ POR SER } G(T) \text{ CERRADO})$$

Y POR TANTO $x_n \xrightarrow{\| \ \|_1} x$.

PUESTO QUE $\|x\|_X \le \|x\|_1 \quad \forall x \in X$, SE TIENE

QUE $I \ (X, \| \ \|_1) \longrightarrow (X, \| \ \|_X)$ ES LINEAL, CONTINUA Y SOBREYECTIVA, Y POR TANTO UN ISOMORFISMO (POR EL COROLARIO ANTERIOR).

ASÍ AMBAS NORMAS SON EQUIVALENTES Y $\exists\, C > 0$ CON $\|x\|_X + \|T(x)\| \le C\, \|x\|_X \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow \|T(x)\| \le (C-1)\|x\|_X \quad \forall x \in X$ LO QUE PRUEBA QUE T ESTÁ ACOTADA Y POR TANTO ES CONTINUA.