ES ESPACIO $C[0,1]$.

SEA K UN ESPACIO MÉTRICO COMPACTO, POR EJEMPLO $[0,1]$,

Y SEA

$$C(K) = \{ f\ K \longrightarrow \mathbb{K} \quad f \text{ CONTINUA} \} \qquad \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$$

ESPACIO DE LAS FUNCIONES CONTINUAS SOBRE UN COMPACTO.

VAMOS A TRABAJAR CON $C[0,1]$, PERO TODO LO QUE HAGAMOS EN $C[0,1]$ ES VÁLIDO EN UN $C(K)$ ABSTRACTO (SALVO EN CIERTO RESULTADO EN LO QUE HAY QUE PEDIR CONDICIONES ADICIONALES SOBRE K: SER SEPARABLE POR EJEMPLO).

DEF $C[0,1] = \{ f\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ f \text{ CONTINUA} \}$.

OBSERVACION $C[0,1]$ ES UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE $\mathbb{R}$.

OBSERVACION

$$\forall f \in C[0,1] \quad \exists \alpha \in [0,1] \quad \text{CON} \quad f(\alpha) = \sup \{ |f(x)| : x \in [0,1] \}$$

DEF SE LLAMA NORMA INFINITO DE $f \in C[0,1]$ AL NÚMERO REAL POSITIVO

$$\| f \|_\infty = \sup \{ |f(x)| : x \in [0,1] \}.$$

PROPIEDADES

1) $\| \ \|_\infty \quad C[0,1] \longrightarrow [0,\infty)$ APLICACIÓN DE $C[0,1]$ EN $\mathbb{R}$.
$\qquad f \longrightarrow \| f \|_\infty$

2) $\| f \|_\infty \geq 0 \quad \forall f \in C[0,1]$ y $\| f \|_\infty = 0 \iff f = 0$.

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \| \lambda f \|_\infty = |\lambda| \, \| f \|_\infty$

4) $\forall f, g \in C[0,1] \quad \| f + g \|_\infty \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$ (PROPIEDAD TRIANGULAR)

DEM (EJERCICIO).

2) SI $\| f \|_\infty = 0$ POR DEFINICIÓN DE $\| \ \|_\infty \Rightarrow |f(x)| = 0 \quad \forall x \in [0,1]$

3:) $\|f+g\|_\infty = \sup \{ |f+g(x)| : x \in [0,1] \} \leq$

$\leq \sup \{ |f(x)| + |g(x)| \quad x \in [0,1] \} \leq$

$\leq \sup \{ |f(x)| \quad x \in [0,1] \} + \sup \{ |g(x)| \quad x \in [0,1] \} =$

$= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$

DEF SEA X UN ESPACIO VECTORIAL, TAL QUE EXISTE

$\| \ \| \ X \longrightarrow [0,\infty)$ APLICACIÓN CON

1:) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$ y $\|x\| = 0 \iff x = 0$

2:) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$ y $\forall x \in X$

3:) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x,y \in X$.

A LA APLICACIÓN $\| \ \|$ SE LE LLAMA NORMA.

EJEMPLO

$(\mathbb{R} \ | \ |)$, $(\mathbb{C} \ \| \ \|)$, $(C[0,1] \ \| \ \|_\infty)$

DEF SEA X UN ESPACIO VECTORIAL y $\| \ \|$ UNA NORMA SOBRE X, AL PAR $(X, \| \ \|)$ SE LE LLAMA ESPACIO NORMADO.

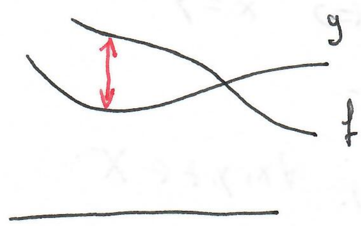
EJEMPLO

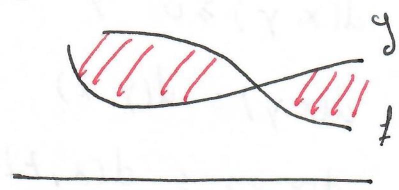
$(C[0,1] \ \| \ \|_\infty)$ ES UN ESPACIO NORMADO

TOPOLOGÍA EN $C[0,1]$

DISTANCIA ENTRE FUNCIONES:

SEA f y g FUNCIONES SOBRE $[0,1]$

① 

② 

¿CÓMO "MEDIMOS" LA DISTANCIA ENTRE AMBAS O LA SEPARACIÓN ENTRE ELLAS?

HAY "INFINITOS" MODOS DE HACERLO, VEAMOS DOS.

① MEDIR LA MAYOR SEPARACIÓN ENTRE ELLAS

$$\sup\{ |f(t)-g(t)| : t\in[0,1]\} = \|f-g\|_\infty$$

$f-g \in C[0,1]$.

② MEDIR EL ÁREA ENTRE ELLAS.

$$\int_0^1 |f-g(t)|\,dt \overset{\text{DEF}}{=} \|f-g\|_1$$

EJERCICIO SEA $f\in C[0,1]$ SE LLAMA NORMA 1 DE f A $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$

VER QUE $\|\ \|_1$ ES UNA NORMA SOBRE $C[0,1]$.

$\underline{D}$ SON OBVIAS SALVO

$\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f\equiv 0$; AHORA SI $f\in C[0,1]$, $|f|\in C[0,1]$ y $|f|\geq 0$, SI $\exists\, x_0\in[0,1]$ CON $|f(x_0)|>0$ ENTONCES $\int_0^1 |f(t)|\,dt>0$. LO CUAL NO ES POSIBLE.

¿QUÉ NORMA ES MEJOR PARA $C[0,1]$? ¿SON EQUIVALENTES EN ALGÚN SENTIDO?

PROPOSICIÓN SEA $(X, \| \ \|)$ UN ESPACIO NORMADO

SEA $d: X \times X \longrightarrow [0, \infty)$

$x, y \longrightarrow d(x, y) = \| x - y \|$.

d ES UNA MÉTRICA, ES DECIR:

a) $d(x, y) \geq 0$ Y $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

b) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$

c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y). \quad \forall x, y, z \in X$.

DEM (EJERCICIO)

a) SI $d(x, y) = \| x - y \| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$

X ESPACIO VECTORIAL

b) $d(x, y) = \| x - y \| = \| -1(y - x) \| = |-1| \, \| y - x \| = d(y, x)$.

c) $d(x, y) = \| x - y \| = \| x - z + z - y \| \leq \| x - z \| + \| z - y \|$.

COROLARIO: TODO ESPACIO NORMADO ES UN ESPACIO MÉTRICO Y POR TANTO TIENE UNA TOPOLOGÍA MÉTRICA

COROLARIO

a) $(C[0,1], \| \ \|_\infty)$ ES UN ESPACIO MÉTRICO

b) $(C[0,1], \| \ \|_1)$ ES UN ESPACIO MÉTRICO

¿ a) Y b) SON EL MISMO ESPACIO TOPOLÓGICO?

NO

PROPOSICIÓN $(C[0,1], \|\ \|_\infty)$ ES UN ESPACIO MÉTRICO COMPLETO (p.d. TODA SUCESIÓN DE CAUCHY ES CONVERGENTE)

DEM SEA $(f_n)_{n\geq 1}^\infty \subseteq C[0,1]$ SUCESIÓN DE CAUCHY

E.D. $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 : n,m \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$

¿$\exists f \in C[0,1]$ CON $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\ \|_\infty} f$, E.D.

$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 : n \geq n_0 \quad \|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$?

OBSERVACIÓN: $f_n \xrightarrow{\|\ \|_\infty} f \iff f_n \to f$ UNIFORMEMENTE SOBRE $[0,1]$

SEA $x \in [0,1]$.

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

LUEGO $(f_n(x))_{n\geq 1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$ ES UNA SUCESIÓN DE CAUCHY

Y ASÍ $\exists f(x) \in \mathbb{R}$ CON $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

SEA $f: [0,1] \to \mathbb{R}$
$x \to f(x)$.

¿$f_n \xrightarrow{\|\ \|_\infty} f$?

¿$f \in C[0,1]$?

SEA $\varepsilon>0 \ \exists n_0 : n,m \geq n_0 \Rightarrow \|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$

ASÍ $\forall x \in [0,1]$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$$

$\Big\downarrow m \to \infty$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \ \text{y} \ \forall x \in [0,1]$$

ASÍ $f_n \xrightarrow{\|\ \|_\infty} f$

OBSERVACIÓN $f_n \xrightarrow{\|\ \|_\infty} f \iff f_n \to f$ UNIFORMEMENTE EN $[0,1]$

LA CONVERGENCIA UNIFORME IMPLICA QUE $f \in C[0,1]$. c.q.d.

SEA $x \in [0,1]$ Y SEA $\varepsilon > 0 \ \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon/3$

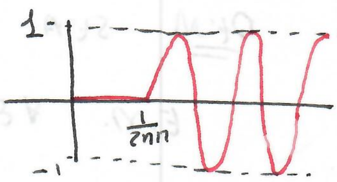
POR SER K COMPACTO Y f_{n_0} CONTINUA $\exists \delta > 0 : |x'-y'| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x') - f_{n_0}(y')| < \varepsilon/3$

ASÍ $\forall y \in (x-\delta, x+\delta) \quad |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| < \varepsilon$.

LUEGO f ES CONTINUA EN x.

CONTRAEJEMPLO $(C[0,1] \; \| \; \|_1)$ ES UN ESPACIO MÉTRICO **NO** COMPLETO.

SEA $f_n(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{SI } x > \frac{1}{2n\pi} \\ 0 & \text{SI } x \in [0, \frac{1}{2n\pi}] \end{cases}$



$f_n \in C[0,1]$

Y $\|f_n - f_m\|_1 \underset{m>n}{=} \int_{\frac{1}{2m\pi}}^{\frac{1}{2n\pi}} |\operatorname{sen} \frac{1}{x}| \, dx \leq \int_{\frac{1}{2m\pi}}^{\frac{1}{2n\pi}} dt = \frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{2m\pi} \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$

SIN EMBARGO **NO** EXISTE $f \in C[0,1]$ CON

$f_n \xrightarrow{\| \|_1} f$

SI EXISTIESE f

Y $f(0) = 0$ SEA $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists \delta > 0$ CON $|f(x)| < 1/2$

$\forall x \in (0, \delta)$.

ASÍ $\|f(x) - f_m(x)\|_1 \geq \int_0^{\delta} |f(x) - f_m(x)| \, dt >$

$> \int_{\frac{1}{2(m-1)\pi}}^{\frac{1}{2(m-2)\pi}} |f(x) - \operatorname{sen} \frac{1}{x}| >$

$\downarrow$

$\forall m$ CON $\frac{1}{2(m-2)\pi} < \delta$

$> \int_{\frac{1}{2(m-1)\pi}}^{\frac{1}{2(m-1)\pi - \pi/2}} |\frac{1}{2} - \operatorname{sen} \frac{1}{x}| \, dx = ct > 0$

$\downarrow$

Independiente de m.

$*$ $\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{SI } x \neq 0 \\ \infty & \text{SI } x = 0 \end{cases}$

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta = 1$
- $\int \delta(x) f(x) \, dx = f(0)$

δ DELTA DE DIRAC.

SCHWARTZ ~1950

SI $f(0) = \delta \neq 0$ SE PROCEDE DE MANERA ANÁLOGA

DEF UN ESPACIO NORMADO COMPLETO $(X, \| \|)$ SE LLAMA ESPACIO DE BANACH. (1920 TESIS DE S. BANACH).

COROLARIO $(C[0,1] \; \| \; \|_\infty)$ ES UN ESPACIO DE BANACH.

MENCIÓN ESPACIO LOCALMENTE CONVEXO
ESPACIO DE DISTRIBUCIONES (*)

COMPACIDAD EN $(C[0,1], \|\ \|_\infty)$

EJEMPLO SEAN $f_n(x) = x^n \in C[0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

- $\|f_n\|_\infty \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $(f_n)_{n\geq 1}^\infty$ ESTÁ ACOTADO
- SI $f_{n_k} \xrightarrow{\|\ \|_\infty} f$, ENTONCES $\exists n_0$ CON $f(x) = x^{n_0}$.

Dem. SI $n_k \to \infty$ ENTONCES $f = \begin{cases} 1 & \text{SI } x = 1 \\ 0 & \text{SI } x \neq 1 \end{cases}$ NO ES CONTINUA; LUEGO

$\exists n_0 = \max_k (n_k)$ Y ES FÁCIL VER QUE $\exists \lim_{k\to\infty} n_k = n_0' \in \mathbb{N}$

Y $f_{n_k}(x) \longrightarrow x^{n_0'}$; POR LA UNICIDAD DEL LÍMITE

$f(x) = x^{n_0'}$. ASÍ $(f_n)_{n=1}^\infty$ ES CERRADO.

SIN EMBARGO **NO** ES COMPACTO.

$$\boxed{\text{EJEMPLO DE CONJUNTO CERRADO Y ACOTADO NO COMPACTO.}}$$

DEF SEA $C(K)$ CON K ESPACIO MÉTRICO COMPACTO.

i) $S \subset C(K)$ SE DICE EQUICONTINUO EN $x \in K$ SI $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ TAL QUE $\forall y \in K$ CON $d(x,y) < \delta$ $\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ $\forall f \in S$.

ii) $S \subset C(K)$ SE DICE EQUICONTINUO SI LO ES EN TODO $x \in K$.

TEOREMA DE ASCOLI-ARZELA (1883-89) SEA K UN ESPACIO MÉTRICO COMPACTO Y SEA $(C(K), \|\ \|)$ SON EQUIVALENTES

a) $S \subset C(K)$ ES CERRADO, ACOTADO Y EQUICONTINUO

b) S ES COMPACTO EN $C(K)$.

DEM. DAREMOS LA PRUEBA PARA $C[0,1]$ (ASCOLI 1883). ESTA PRUEBA SIRVE, SI K ADEMÁS ES SEPARABLE, PARA EL CASO $C(K)$. EL CASO GENERAL ES TÉCNICAMENTE UN POCO MÁS COMPLICADO (ARZELA 1889)

DEM $b \Rightarrow a)$.

SI $S \subseteq E$ ES COMPACTO:

1º) $\exists M > 0$ CON $\|f\|_\infty \leq M$ $\forall f \in S$, EN OTRO CASO $\exists f_n \in S$ CON $\|f_n\|_\infty > n$ $\forall n \in \mathbb{N}$; $\exists x_n \in K$ CON $f_n(x_n) = \|f_n\|_\infty$

$\exists x_{n_k} \to x \in K$ Y $\exists f_{n_{k_j}} \to f \in S$, POR SER S COMPACTO, ASI

$$\begin{array}{ccc} f_{n_{k_j}}(x_{n_{k_j}}) & \longrightarrow & f(x) \\ \downarrow & & \\ \infty & & \end{array}$$

CONTRADICCION.

2º) S ES CERRADO.

SI $(f_n) \subseteq S$ Y $f_n \xrightarrow{\|\ \|_\infty} f$, $\exists f_{n_k} \to f \in S$.

LUEGO $f \in S$ Y ASI S ES CERRADO.

3º) S ES EQUICONTINUO.

SEA $\varepsilon > 0$ $\exists f_1 \ldots f_n \in S$ (finitas) CON

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \varepsilon/3).$$

DEF $B(f_i, \varepsilon/3) = \{ f \in C(K) : \|f_i - f\| < \varepsilon/3 \}$.

POR SER S COMPACTO.

CADA f_i NO ES SOLO CONTINUA SINO UNIFORMEMENTE CONTINUA EN K. ASI PARA $\varepsilon/3$ $\exists \delta_i > 0$ CON

$$|x-y| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon/3$$

SEA $\delta = \min\{\delta_1 \ldots \delta_n\} > 0$.

SEA $|x-y| < \delta$, $x, y \in K$, SEA $f \in S$, $\exists i_0$ CON $\|f - f_{i_0}\|_\infty \leq \varepsilon/3$

ASI $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{i_0}(x)| + |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y)| + |f_{i_0}(y) - f(y)| <$

$\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3$ LO QUE PRUEBA LA EQUICONTINUIDAD

6

DEM $a \Rightarrow b)$ SUPONDREMOS K SEPARABLE

(EN $[0,1]$, $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ ES UN CONJUNTO NUMERABLE DENSO EN $[0,1]$.)

SEA $(x_m)_{m=1}^{\infty} \subseteq K$ CONJUNTO DENSO EN K.

SEA $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq S$. ¿$\exists\, f_{n_k}$ SUBSUCESIÓN CONVERGENTE A $f \in S$?

POR SER S ACOTADO $\exists\, M>0$ CON $|f_n(x)| < M$ $\forall x\in K$ Y $\forall n \in \mathbb{N}$

ASÍ $(f_n(x_1))_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{K}$ ESTÁ ACOTADA EN $\mathbb{K}$ Y EXISTE UNA SUBSUCESIÓN $(f_{n,1})$ DE (f_n) CON

$$f_{n,1}(x_1) \longrightarrow f(x_1) \in \mathbb{K}.$$

ASÍ $(f_{n,1}(x_2))_{n=2}^{\infty} \subseteq K$ ESTÁ ACOTADA EN $\mathbb{K}$ Y EXISTE UNA SUBSUCESIÓN $(f_{n,2})$ DE $(f_{n,1})$ CON

$$f_{n,2}(x_2) \longrightarrow f(x_2) \in \mathbb{K}.$$

(OBSERVEMOS QUE $f_{n,2}(x_1) \longrightarrow f(x_1)$)

PROCEDIENDO POR RECURRENCIA, EXISTE

$(f_{n,k})$ SUBSUCESIÓN DE $(f_{n,k-1})$ CON

$$f_{n,k}(x_j) \longrightarrow f(x_j) \quad \forall\, j=1,2,\dots k, \ \forall k\in\mathbb{N}.$$

$\boxed{\text{PROCESO DE DIAGONALIZACIÓN DE CANTOR}}$

$$\begin{array}{ccccccc}
f_{1,1} & f_{2,1} & \cdots & & f_{n,1} & \cdots & \\
f_{1,2} & f_{2,2} & \cdots & & f_{n,2} & & \\
f_{1,3} & \cdots & f_{2,3} & f_{3,3} & \cdots & f_{n,3} & \\
\vdots & & & & & & \\
f_{1,k} & f_{2,k} & f_{3,k} & \cdots & f_{k,k} & \cdots & f_{n,k}
\end{array}$$

$f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_n$

$x_1 \quad x_2 \quad \quad x_n \quad x_{n+1}$

$x_{n_1} \quad x_{n_2} \quad x_{n_k}$

$x_{n_{k_1}} \quad x_{n_{k_2}} \quad \cdots \quad x_{n_{k_j}}$

etc.

SEA LA SUBSUCESIÓN $(f_{n,n})_{n=1}^{\infty}$

ESTA SUBSUCESIÓN LO ES DE CADA SUBSUCESIÓN $(f_{n,k})_{n=1}^{\infty}$ AL MENOS DESDE EL TÉRMINO $f_{k,k}$ ASÍ

$$f_{n,n}(x_m) \longrightarrow f(x_m) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

$\boxed{\text{VEAMOS QUE } (f_{n,n})_{n=1}^{\infty} \subseteq S \subseteq C(K) \text{ ES UNA SUCESIÓN DE CAUCHY.}}$

SEA $\varepsilon > 0$ POR SER S EQUICONTINUA $\exists \delta > 0$ TAL QUE

1 SI $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/3 \quad \forall f \in S$ (VER EJERCICIO 7 DE LA HOJA 6)

POR SER K COMPACTO Y COMO $K \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} B(x_m, \delta)$, $\exists m_1 \ldots m_r$

$$\text{CON } K \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} B(x_{m_j}, \delta). \quad (*)$$

LAS SUCESIONES $(f_{n,n}(x_{m_j}))_{n=1}^{\infty}$ SON CONVERGENTES EN $\mathbb{K}$

2 ASÍ PARA $\varepsilon/3$ $\exists n_0$: $m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_{n,n}(x_{m_j}) - f_{m,m}(x_{m_j})| < \varepsilon/3$ $\forall x_{m_1} \ldots x_{m_j}$.

SEA AHORA $x \in K$, $\exists x_{m_{j_0}}$ CON $|x - x_{m_{j_0}}| < \delta$ POR $(*)$

ASÍ $\forall m, n \geq n_0$ $|f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)| \leq$

$$\leq |f_{n,n}(x) - f_{n,n}(x_{m_{j_0}})| + |f_{n,n}(x_{m_{j_0}}) - f_{m,m}(x_{m_{j_0}})| + |f_{m,m}(x_{m_{j_0}}) - f_{m,m}(x)| \leq$$

$$\leq \underset{1}{\varepsilon/3} + \underset{2}{\varepsilon/3} + \underset{1}{\varepsilon/3} = \varepsilon. \quad \text{ASÍ } \|f_{n,n} - f_{m,m}\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0.$$

LUEGO $(f_{n,n}) \subseteq (C(K), \|\ \|_\infty)$ ES CONVERGENTE, POR SER $C(K)$ COMPLETO. $\boxed{\text{IMPORTANCIA DE LA COMPLETITUD.}}$

POR SER S CERRADO, $f \in S$.

LO QUE PRUEBA QUE S ES COMPACTO c.q.d.

APLICACIÓN – TEOREMA DE PEANO

SEA EL PROBLEMA DE CAUCHY

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x} = f(x,y) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{CON } f\,[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ CONTINUA.}$$

EL TEOREMA DE PEANO NOS DICE QUE ESTE PROBLEMA TIENE AL MENOS UNA SOLUCIÓN LOCAL.

VEAMOS UNA PRUEBA EN UN CASO MAS SENCILLO USANDO LA POLIGONAL DE EULER Y EL TEOREMA DE ASCOLI-ARZELA (PRUEBA DE TONELLI 1925)

TEOREMA SEA $F\,[0,1]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA Y ACOTADA

SEA EL PROBLEMA DE CAUCHY

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) & t \in [0,1] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad x(t) = \int_0^t F(s, x(s))\, ds + x_0$$

EXISTE UNA SOLUCIÓN GLOBAL DE ESTE PROBLEMA

DEM PARA CADA $k = 1, 2, 3 \ldots$ SE DEFINEN LAS FUNCIONES

$$x_k(t) = \begin{cases} x_0 & \text{SI } 0 \le t \le 1/k \\ x_0 + \displaystyle\int_0^{t-1/k} F(s, x_k(s))\, ds & \text{SI } j/k \le t \le \frac{j+1}{k} \\ & j = 1, 2 \ldots k-1. \end{cases}$$

OBSERVESE QUE $x_k(t)$ SE DEFINE EN $[1/k, 2/k]$ EN FUNCIÓN DE LA DEFINICIÓN DE x_k EN $[\frac{0}{k}, 1/k]$; EN GENERAL SE DEFINE SOBRE $[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}]$ EN FUNCIÓN DE SU VALOR EN $[0, j/k]$.

(x_k QUEBRADA DE EULER)

PUESTO QUE $|F(t,x)| \leq M \quad \forall [0,1] \times \mathbb{R}$ (F ACOTADA)

SE SIGUE QUE

$$|x_k(t)| \leq |x_0| + \int_0^1 M\,ds = |x_0| + M. \quad ①$$

ADEMÁS

$$|x_k(t) - x_k(t')| \leq M|t-t'|. \quad ②$$

DE ① SE SIGUE QUE $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq C[0,1]$ ESTÁN ACOTADAS

Y DE ② SE SIGUE QUE ES UNA FAMILIA EQUICONTINUA.

DEL TEOREMA DE ASCOLI-ARZELA SE SIGUE QUE $\exists x \in C[0,1]$

CON $\quad x_k \xrightarrow{\|\ \|_\infty} x \quad$ O UNA SUBSUCESIÓN.

POR SER F CONTINUA Y UNIFORMEMENTE CONTINUA

SOBRE $\quad [0,1] \times [-|x_0| - M, |x_0| + M]$. SE SIGUE QUE

$$F(s, x_k(s)) \xrightarrow{\|\ \|_\infty} F(s, x(s))$$

Y ASÍ

$$\begin{array}{ccccc} x_k(t) & = & x_0 & + & \int_0^{t-1/k} F(s, x_k(s))\,ds \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ x(t) & = & x_0 & + & \int_0^t F(s, x(s))\,ds. \quad \forall t \in [0,1]. \end{array}$$

LO QUE PRUEBA EL RESULTADO.

SEPARABILIDAD DE C(K)

DEF UN ESPACIO TOPOLÓGICO X (UN ESPACIO NORMADO) ES SEPARABLE SI EXISTE $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ CON $\overline{\{a_n\}} = X$.

EL CONOCIDO TEOREMA DE WEIERSTRASS ESTABLECE LA SEPARABILIDAD DE $C[0,1]$.

TEOREMA (WEIERSTRASS, 1885).

a) EL CONJUNTO DE LOS POLINOMIOS EN UNA VARIABLE SON DENSOS EN $(C[a,b], \| \ \|_\infty)$.

b) EL ESPACIO DE BANACH $(C[a,b], \| \ \|_\infty)$ ES SEPARABLE.

DEM b) LOS POLINOMIOS EN UNA VARIABLE DE COEFICIENTES RACIONALES SON UN CONJUNTO NUMERABLE EN $C[a,b]$ QUE POR a) SON DENSOS EN $C[a,b]$.

SEA $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

SEA $\varepsilon > 0$, SEA $M = \| |x|^n + |x|^{n-1} + \dots + |x| + 1 \|_\infty$ EN $[a,b]$.

SEA $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0 \in \mathbb{Q}$ CON $|a_j - b_j| < \frac{\varepsilon}{M}$ $\forall j = 0, 1, \dots, n$

ASÍ $|P(x) - (b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0)| \le$

$$\le |a_n - b_n||x|^n + \dots + |a_1 - b_1||x| + |a_0 - b_0| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{M}(|x|^n + \dots + |x| + 1) < \varepsilon.$$

OBSERVACIÓN: EL TEOREMA DE STONE-WEIERSTRASS CARACTERIZA CONJUNTOS DENSOS EN $C(K)$.