ESPACIOS NORMADOS

SEA X UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE UN CUERPO $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Ó $\mathbb{C}$.

DEFINICIÓN UNA NORMA SOBRE X ES UNA FUNCIONAL POSITIVO SOBRE X

$$\| \ \| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{QUE VERIFICA}$$

a) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$ y $\forall x \in X$

c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$

OBSERVACIÓN: SON LAS MISMAS PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO EN $\mathbb{R}$ O DEL MÓDULO EN $\mathbb{C}$.

EJERCICIO: $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\| \quad \forall x, y \in X$.

DEFINICIÓN: UN ESPACIO VECTORIAL X DOTADO DE UNA NORMA SE LLAMA ESPACIO NORMADO $(X, \| \ \|)$.

EJEMPLOS: a) $X = \mathbb{R}^n$.

$$\|(x_1 \dots x_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

$$\|(x_1 \dots x_n)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \quad p \geq 1.$$

$$\|(x_1 \dots x_n)\|_\infty = \sup\{|x_k| : k = 1, 2 \dots n\}.$$

SON TRES NORMAS SOBRE $\mathbb{R}^n$. MÁS ADELANTE VEREMOS QUE SON EQUIVALENTES (e.d. DAN LA MISMA TOPOLOGÍA)

b) $C[0,1] = \{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ CONTINUA} \}$.

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt.$$

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\}.$$

SON DOS NORMAS NO EQUIVALENTES SOBRE $C[0,1]$.

EJEMPLO SEA (Ω, Σ, μ) UN ESPACIO DE MEDIDA.

- POR EJEMPLO

  $\Omega = (-\infty, \infty)$ Y μ LA MEDIDA DE LEBESGUE

- POR EJEMPLO

  $(\Omega\ \Sigma\ \mu)$ UN ESPACIO DE PROBABILIDAD.

  Ω CONJUNTO DE SUCESOS Y μ LA PROBABILIDAD SOBRE LO MISMO (ASI $\mu(\Omega) = 1$).

SEA $\mathcal{L}_1(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{K} : f$ μ-MEDIBLE Y μ-INTEGRABLE $\}$

ASI SI $f \in \mathcal{L}_1(\Omega) \Rightarrow \exists \int_\Omega |f(t)|\, d\mu(t)$

SEA $\| \ \|_1 \ \mathcal{L}_1(\Omega) \longrightarrow [0, \infty)$

$f \longrightarrow \| f \|_1 = \int_\Omega |f(t)|\, d\mu(t)$

ESTO ES CASI UNA NORMA, SALVO QUE NO VERIFICA $\| f \|_1 = 0 \Rightarrow f \equiv 0$.. (SEA.

$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{SI } t = 1/n. \\ 0 & \text{SI } t \neq 0 \end{cases}$ f ES MEDIBLE LEBESGUE SOBRE $(-\infty, \infty)$

CON $f \equiv 0$ μ-CASI TODO PUNTO Y ASI $\|f\|_1 = 0$; PERO $f \neq 0$.

SEA LA RELACIÓN R, $f R g \iff f - g \equiv 0$ μ-C.T.P.

ENTONCES $L_1(\Omega) = \mathcal{L}_1(\Omega)/_R$ ES UN ESPACIO VECTORIAL

Y $(L_1(\Omega), \| \ \|_1)$ ES UN ESPACIO NORMADO

OBSERVACION: SEA $[f] \in \mathcal{L}_1(\Omega)/_R$ $\| [f] \|_1 = \| f \|_1$ ESTE FUNCIONAL ESTA BIEN DEFINIDO YA QUE SI $f \equiv g$ μ-C.T.P.

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| - |g(t)|\, d\mu(t) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f - g(t)|\, d\mu(t) = 0.$$

EJEMPLO $L_p(\Omega) := \{ f\ \Omega \to \mathbb{K} : \mu$-MEDIBLE CON $|f|^p \in L_1(\Omega) \}$. $p \geq 1$

CON $\| f \|_p = \left(\int_\Omega |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p}$ NORMA.

TOPOLOGIA EN ESPACIOS NORMADOS

SEA $(X \; \| \; \|)$ UN ESPACIO NORMADO. LA NORMA $\| \; \|$ DEFINE UNA METRICA SOBRE X

$$d \; X \times X \longrightarrow [0, \infty)$$
$$(x, y) \longrightarrow d(x, y) = \|x - y\|.$$

EJERCICIO:

a) $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in X$

b) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$

c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X.$

OBSERVACION EN $(X, \| \; \|)$

•) $\|x\|$ ES LA DISTANCIA DE x A 0.

••) $(X, \| \; \|)$ TIENE UNA TOPOLOGIA METRICA DONDE UNA BASE DE ENTORNOS ABIERTOS BIEN DADA POR.

DEF SE LLAMA BOLA ABIERTA DE CENTRO $a \in X$ Y RADIO $r > 0$

$$B_a(r) = B(a, r) = \{x \in X : \|a - x\| < r\}.$$

LAS BOLAS $\{B_a(r)\}_{\substack{a \in X \\ r > 0}}$ FORMAN UNA BASE DE ENTORNOS DEL PUNTO a.

DEF $A \subset X$ ES ABIERTO SI $\forall a \in A \; \exists r > 0$ CON $B_a(r) \subseteq X$.

DEF $B_X = B_0(1)$ BOLA UNIDAD ABIERTA

$\overline{B_X} = \overline{B_0(1)}$ BOLA UNIDAD CERRADA

$S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. ESFERA UNIDAD.

EJERCICIO $B_a(r) = a + B_0(r)$.

DEM SI $x \in B_a(r) \Rightarrow x = a + (x - a)$ Y $\|x - a\| < r \Rightarrow x - a \in B_0(r)$.

SI $y = a + x$, $x \in B_0(r)$ $\|y - a\| = \|x\| < r \Rightarrow y \in B_a(r)$.

COMPLETITUD EN ESPACIOS NORMADOS

SEA $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq (X, \|\ \|)$ UNA SUCESIÓN DE UN ESPACIO NORMADO.

DEF SEA $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ UNA SUCESIÓN

a) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ SE DICE DE CAUCHY SI $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ DE MODO QUE SI $m, n \geq n_0$ SE TIENE QUE

$$\| x_n - x_m \| < \varepsilon$$

b) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ SE DICE CONVERGENTE SI $\exists x \in X$ DE MODO QUE $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ TAL QUE SI $n \geq n_0$ ENTONCES $\| x_n - x \| < \varepsilon$

(NOTACIÓN $\lim_{n \to \infty} x_n = x$)

DEF UN CONJUNTO $C \subseteq (X\ \|\ \|)$ SE LLAMA ACOTADO SI $\exists M > 0$ CON $\| a \| \leq M\ \ \forall a \in C$.

EJERCICIOS

•) $C \subseteq X$ ESTÁ ACOTADO SI Y SÓLO SI $\exists M > 0$ CON $C \subseteq B_0(M)$.

••) $(x_n)_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{\|\ \|} x$ SI Y SÓLO SI $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ TAL QUE SI $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B_x(\varepsilon)$.

EJERCICIOS

a) SI $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ ES CONVERGENTE, ENTONCES $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ES DE CAUCHY.

b) SI $x_n \xrightarrow{\|\ \|} x$, ENTONCES x, EL LÍMITE, ES ÚNICO

c) SI $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ES DE CAUCHY ENTONCES ESTÁ ACOTADA EN X.

DEM LAS MISMAS QUE LAS QUE SE TIENEN PARA SUCESIONES DE NÚMEROS REALES.

DEFINICION UN ESPACIO NORMADO $(X, \| \ \|)$ SE LLAMA COMPLETO SI TODA SUCESION DE CAUCHY ES CONVERGENTE

A LOS ESPACIOS NORMADOS COMPLETOS SE LES LLAMA ESPACIOS DE BANACH (EN HONOR DE S. BANACH QUE EN SU TESIS DOCTORAL DE 1920 LOS DEFINIÓ.).

EJEMPLO

- $(C[0,1] \ \| \ \|_1)$ ES UN ESPACIO DE NORMADO **NO** COMPLETO
- $(\mathbb{R}^n \ \| \ \|_2)$ ES UN ESPACIO DE BANACH
- $(C[0,1] \ \| \ \|_\infty)$ ES UN ESPACIO DE BANACH.
- $(L_1(\Omega) \ \| \ \|_1)$ ES UN ESPACIO DE BANACH COMO VEREMOS.

DEF. $Z \subseteq (X \ \| \ \|)$ ES UN CONJUNTO CERRADO SI $X \setminus Z$ ES ABIERTO

OBSERVACION: $Z \subseteq X$ ES CERRADO $\iff \forall (x_n) \subseteq Z$ CON $(x_n) \xrightarrow{\| \ \|} x$ SE TIENE QUE $x \in Z$.

EJEMPLO SEA $(X \ \| \ \|)$ UN ESPACIO DE BANACH Y SEA $Z \subseteq X$ UN SUBESPACIO VECTORIAL DE X, QUE ADEMAS ES CERRADO, ASI $(Z, \| \ \|)$ ES UN ESPACIO DE BANACH.

DEM SEA $(z_n) \subseteq Z \subseteq X$ CON (z_n) SUCESION DE CAUCHY EN Z, POR TANTO TAMBIEN EN X. POR SER X BANACH $\exists x \in X$ CON $z_n \xrightarrow{\| \ \|} x$, POR SER Z CERRADO $\Rightarrow x \in Z$. LO QUE PRUEBA QUE $(Z \ \| \ \|)$ ES ESPACIO DE BANACH.

DEF SEA $K \subseteq (X, \|\ \|)$. SE DICE QUE K ES COMPACTO SI $\forall (x_n) \subseteq K$, EXISTE UNA SUBSUCESIÓN $x_{n_k} \xrightarrow{\|\ \|} x \in K$.

PROPOSICIÓN: SEA $(X, \|\ \|)$ UN ESPACIO NORMADO Y SEA $K \subseteq X$ UN SUBCONJUNTO COMPACTO, ENTONCES K ES CERRADO Y ACOTADO.

DEM •) VEAMOS QUE K ES CERRADO.

SEA $(x_n) \subseteq K$ CON $x_n \xrightarrow{\|\ \|} x$.

POR SER K COMPACTO $\exists\, x_{n_k} \xrightarrow{\|\ \|} y \in K$

Y COMO $x = y$ SE SIGUE QUE $x \in K$, LO QUE PRUEBA QUE K ES CERRADO

••) VEAMOS QUE K ESTÁ ACOTADO.

SI SUPONEMOS QUE NO ESTÁ ACOTADO $\forall M > 0\ \exists\, x \in K$ CON $\|x\| > M$.

SEA $M_1 = 1$ $\exists\, x_1 \in K$ CON $\|x_1\| > 1$.

SEA $M_2 = \|x_1\| + 1$ $\exists\, x_2 \in K$ CON $\|x_2\| > \|x_1\| + 1$

(ASÍ $\|x_2 - x_1\| > 1$, EN OTRO CASO
$\|x_2\| \leq \|x_1 - x_2\| + \|x_1\| \leq 1 + \|x_1\|$).

SEA $M_3 = \|x_2\| + 1$ $\exists\, x_3 \in K$ CON $\|x_3\| > \max\{\|x_1\|+1, \|x_2\|+1\}$

ASÍ POR RECURRENCIA CONSTRUIMOS $(x_n) \subseteq K$ CON $\|x_m - x_n\| > 1$. $\forall n < m \in \mathbb{N}$

ASÍ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ NO TIENE NINGUNA SUBSUCESIÓN DE CAUCHY, Y POR TANTO NINGUNA SUBSUCESIÓN CONVERGENTE, LO CUAL CONTRADICE QUE K SEA COMPACTO.

EJEMPLO: $\overline{B_{C[0,1]}}$ ES CERRADA Y ACOTADA EN $(C[0,1], \|\ \|_\infty)$ PERO NO ES COMPACTA ($(x^n)_{n=1}^{\infty} \subseteq C[0,1]$ NO TIENE NINGUNA SUBSUCESIÓN CONVERGENTE)