TEOREMA. UN ESPACIO NORMADO X ES COMPLETO SI Y SOLO SI $\forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ TAL QUE $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, ENTONCES $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ CONVERGE EN X.

DEM: OBSERVACION $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ ES UNA SERIE DE NUMEROS REALES POSITIVOS.

LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \left(S_k = \sum_{n=1}^{k} x_n\right)_{k=1}^{\infty}$. LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ES CONVERGENTE SI $\exists \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} x_n$.

LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ SE DICE ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE SI $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ ES CONVERGENTE.

EN $\mathbb{R}$ TODA SERIE ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE ES CONVERGENTE.

EN $(Y, \|\ \|)$ ESPACIO DE BANACH TAMBIEN TODA SERIE ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE ES CONVERGENTE.

(PERO EN GENERAL NO ES CIERTO EN $(X, \|\ \|)$ ESPACIOS NORMADOS).

$\Rightarrow)$ SI X ES COMPLETO Y $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : k, \ell \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=k}^{\ell} \|x_n\| < \varepsilon$$

ASI

$$\| S_\ell - S_k \| = \left\| \sum_{n=1}^{\ell} x_n - \sum_{n=1}^{k} x_n \right\| = \left\| \sum_{n=k+1}^{\ell} x_n \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{n=k}^{\ell} \| x_n \| < \varepsilon.$$

LUEGO $\left(S_k = \sum_{n=1}^{k} x_n\right)_{k=1}^{\infty}$ ES UNA SUCESIÓN DE CAUCHY EN X Y POR SER COMPLETO ES CONVERGENTE

$\Leftarrow$) SEA $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ UNA SUCESION DE CAUCHY.

PARA CADA $k \in \mathbb{N}$ EXISTE $n_k \in \mathbb{N}$ TAL QUE SI

$n, m \geq n_k \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}$

SEA $x_{n_1}\ x_{n_2} \dots\ x_{n_k}$ SUBSUCESIÓN DE (x_n)

ASI $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$

AHORA POR HIPÓTESIS

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} x_{n_{k+1}} - x_{n_k} = -x_{n_1} + x_{n_{N+1}} \xrightarrow[N\to\infty]{\|\ \|} x \in X$$

LUEGO $x_{n_k} \xrightarrow{\|\ \|} x + x_{n_1} = y$.

DADO QUE $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ES DE CAUCHY Y TIENE UNA SUBSUCESIÓN CONVERGENTE, $(x_{n_k}) \to y$, SE SIGUE QUE $x_n \xrightarrow{\|\ \|} y$

(YA QUE $\|y - x_n\| \leq \|y - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)

EJEMPLO SEA $S = \{(x_n)_{n=1}^{\infty}$: SUCESION DE NÚMEROS $\mathbb{K}\}$.

SEA $\ell_1 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in S : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$.

SEA $\|a\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $a \in \ell_1$.

$(\ell_1\ \|\ \|_1)$ ES UN ESPACIO NORMADO.

PROPOSICION $(\ell_1\ \|\ \|_1)$ ES UN ESPACIO DE BANACH.

DEM OBSERVACION: SI $(a^m)_{m=1}^{\infty} \subseteq \ell_1$ Y $a^m \xrightarrow{\|\ \|_1} a$

ENTONCES $a_j^m \xrightarrow[m\to\infty]{} a_j \quad \forall j \in \mathbb{N}$

YA QUE $|a_j^m - a_j| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^m - a_n| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.

VAMOS A USAR EL TEOREMA ANTERIOR.

SEA $(a^m)_{m=1}^{\infty} \subseteq (\ell_1 \ \| \ \|_1)$ TAL QUE

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|a^m\|_1 < \infty \quad \text{SI VEMOS}$$

QUE $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a^m \xrightarrow{\| \ \|_1} y$, SE TENDRÁ QUE

$(\ell_1 \ \| \ \|_1)$ ES UN ESPACIO DE BANACH.

AHORA $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \|a^m\|_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^m| =$

VER APUNTES O LIBRO DE BALDOMERO

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_n^m|. \quad \text{ASÍ } \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\exists \sum_{m=1}^{\infty} |a_n^m| \quad \text{Y POR TANTO}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_n^m = y_n \in \mathbb{K}$$

SEA $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$, $\displaystyle\|y\|_1 = \sum |y_n| \leq \sum \sum |a_n^m| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|a^m\|_1 < \infty$

VEAMOS QUE $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a^m \xrightarrow{\| \ \|_1} y$

$$\left\| y - \sum_{m=1}^{N} a^m \right\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_n^m - \sum_{m=1}^{N} a_n^m \right| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{m=N+1}^{\infty} a_n^m \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=N+1}^{\infty} |a_n^m| =$$

$$= \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^m| = \sum_{m=N+1}^{\infty} \|a^m\|_1 \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

(POR HIPÓTESIS)

SEPARABILIDAD EN ESPACIOS NORMADOS

DEF UN ESPACIO NORMADO X SE LLAMA SEPARABLE SI EXISTE UN SUBCONJUNTO NUMERABLE DENSO EN X

(E.D. $\exists A \subseteq X$ CON $\text{CARD } A \leq \text{CARD } \mathbb{N}$. Y
$$\overline{A} = X$$

ED $\exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ CON $\forall x \in X$ Y $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ CON $\|x - x_{n_0}\| < \varepsilon$).

EJEMPLOS

•) $\mathbb{Q}^n \subseteq (\mathbb{R}^n \|\ \|_2)$, $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$ LUEGO $(\mathbb{R}^n \|\ \|_2)$ ES SEPARABLE

•) $(C[0,1] \|\ \|_\infty)$ ES SEPARABLE, GRACIAS A LOS POLINOMIOS CON COEFICIENTES RACIONALES.

•) $(\ell_1 \|\ \|_1)$ ES SEPARABLE (PRACTICA)

DEM SEA $A = \{(x_1 \dots x_n, 0, 0 \dots 0 \dots) \in \ell_1 : x_i \in \mathbb{Q}\ \forall i = 1 \dots n,\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \ell_1$
Card A = Card $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \cup \dots$ = Card $\mathbb{N}$

SEA $a \in \ell_1$ Y SEA $\varepsilon > 0$ $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$, $\exists n_0$ CON $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| < \varepsilon/2$ Y $\exists b \in A$ CON $b_j = 0$ $\forall j \geq n_0$ Y $\|(a_1, \dots, a_{n_0-1}, 0 \dots 0 \dots) - b\|_1 = \sum_{i=1}^{n_0-1} |a_i - b_i| < \varepsilon/2$

AHORA $\|a - b\|_1 = \sum_{i=1}^{n_0-1} |a_i - b_i| + \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2$.

LUEGO $\overline{A} = \ell_1$ c.q.d.

DEF SEA $\ell_\infty = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in S : (|x_n|)_{n=1}^{\infty}$ ESTA ACOTADO EN $\mathbb{R}\}$.

SEA $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$.

PROP: EL ESPACIO NORMADO $(\ell_\infty \|\ \|_\infty)$.

a) ES COMPLETO (PRACTICA)

b) NO ES SEPARABLE.

DEM

CLARAMENTE $\| \ \|_\infty$ ES UNA NORMA SOBRE l_∞.

a) SEA $(X^m)_{m=1}^\infty \subseteq l_\infty$ CON $\sum_{m=1}^\infty \|X^m\|_\infty < \infty$

SI VEMOS QUE $\sum_{m=1}^\infty X^m$ CONVERGE EN $\| \ \|_\infty$
ENTONCES $(l_\infty \ \| \ \|_\infty)$ SERÁ UN ESPACIO DE BANACH.

SEA $Y = (Y_n)_{n=1}^\infty$ CON $Y_n = \sum_{m=1}^\infty x_n^m$

COMO $|Y_n| \leq \sum_{m=1}^\infty |x_n^m| \leq \sum_{m=1}^\infty \|x^m\|_\infty$

$|x_n^m| \leq \|x^m\|_\infty$

VEMOS QUE Y_n ESTÁ BIEN DEFINIDO Y
$\|Y\|_\infty \leq \sum_{m=1}^\infty \|x^m\|_\infty$, ASÍ $Y \in l_\infty$.

AHORA
$$\left\| \sum_{m=1}^N X^m - Y \right\|_\infty = \left\| \left(\sum_{m=N+1}^\infty x_n^m \right)_{n=1}^\infty \right\|_\infty =$$
$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{m=N+1}^\infty x_n^m \right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=N+1}^\infty |x_n^m| \leq$$
$$\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=N+1}^\infty \|x^m\|_\infty = \sum_{m=N+1}^\infty \|x^m\|_\infty \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

POR HIPÓTESIS.

b) VEAMOS QUE l_∞ NO ES SEPARABLE.. SEA $(x^m)_{m=1}^\infty \subseteq l_\infty$
CUALQUIER CONJUNTO NUMERABLE. SE DEFINE $x = (x_n)_{n=1}^\infty$

POR $x_k = \begin{cases} 0 & \text{SI } |x_k^k| \geq 1 \\ 2 & \text{SI } |x_k^k| \leq 1 \end{cases}$ ASÍ $\|x\|_\infty \leq 2$, $x \in l_\infty$

Y $\|x^m - x\|_\infty \geq |x_m^m - x_m| \geq 1.$, LUEGO $(x^m)_{m=1}^\infty$
NO PUEDE SER DENSO EN l_∞.

PROPOSICION: SEA X UN ESPACIO NORMADO Y $(x_n) \subseteq X$ UNA SUCESION. SE DENOTA POR

$$[x_n] = \left\{ \sum_{j=1}^{N} a_j x_j : N \in \mathbb{N},\ a_1, \dots, a_N \in \mathbb{K} \right\}$$

EL SUBESPACIO VECTORIAL ENGENDRADO POR $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ EN X.

POR $\overline{[x_n]}$ SE DENOTA EL ESPACIO VECTORIAL CERRADO, ADHERENCIA DE $[x_n]$ EN X.

SON EQUIVALENTES:

a) X ES SEPARABLE

b) EXISTE $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty} \subseteq X$ CON $\overline{[x_n]} = X$.

DEM (EJERCICIO)

a) $\Rightarrow$ b) ES EVIDENTE, SI $A \subseteq X$ DENSO Y NUMERABLE $A = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ Y $\overline{A} \subseteq \overline{[x_n]} \subseteq X$ COMO $\overline{A} = X$.
SE TIENE EL RESULTADO.

b) $\Rightarrow$ a) SEA $C = \left\{ \sum_{t=1}^{N} q_t x_t : N \in \mathbb{N} \text{ y } q_1 \dots q_N \in \mathbb{Q} \right\}$.

C ES NUMERABLE Y C ES DENSO EN $[x_n]$.

$\left(\forall \sum_{t=1}^{N} a_t x_t \in [x_n] \text{ y } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists (q_t)_{t=1}^{N} \subset \mathbb{Q} \text{ con } |a_t - q_t| < \frac{\varepsilon}{N}\right.$

ASI $\left.\left\| \sum a_t x_t - \sum q_t x_t \right\| \leq \varepsilon \right)$

EJEMPLO SEA $c_0 = \{ (x_n) \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \} \subseteq \ell_\infty$.

SEA $(c_0, \| \ \|_\infty)$

a) c_0 ES UN SUBESPACIO VECTORIAL DE ℓ_∞

b) $(c_0, \| \ \|_\infty)$ ES UN ESPACIO NORMADO

c) c_0 ES CERRADO EN ℓ_∞ ASI $(c_0, \| \ \|_\infty)$ ES UN ESPACIO DE BANACH

(EJERCICIO - PRACTICA)

d) $(c_0, \| \ \|_\infty)$ ES SEPARABLE.

DEM c) SEA $(x^m) \subseteq c_0$ CON $x^m \xrightarrow{\| \ \|_\infty} x \in \ell_\infty$. SI $x \notin c_0$ $\exists \varepsilon > 0$ Y (n_k) CON $|x_{n_k}| > \varepsilon$. PARA $\varepsilon/2$ $\exists n_0 : m > n_0$

$|x^m_{n_k} - x_{n_k}| \leq \| x^m - x \|_\infty < \varepsilon/2 \Rightarrow |x^m_{n_k}| > \varepsilon/2 \quad \forall k$

LUEGO $x^m \notin c_0 \quad \forall m \geq n_0$ CONTRADICCION!!

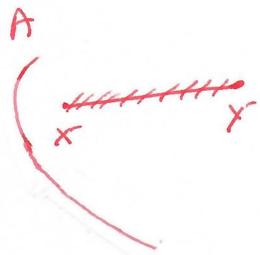
d) SEA $e_n = (0 \dots \underset{n}{1}\ 0 \dots)$, $n \in \mathbb{N}$ SI VEMOS QUE $\overline{[e_n]} = c_0$.
POR LA PROPOSICION ANTERIOR $(c_0, \| \ \|_\infty)$ ES SEPARABLE.
SEA $x = (x_1 x_2 \dots x_n) \dots) \in c_0$, DADO $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 : n \geq n_0$ $|x_n| < \varepsilon$
ASI $\left\| x - \sum_{k=1}^{n_0} x_k e_k \right\|_\infty = \sup_{n \geq n_0} |x_n| < \varepsilon$ c.q.d.

CONVEXIDAD EN ESPACIOS NORMADOS

LA CONVEXIDAD ES UN CONCEPTO LIGADO ESTRECHAMENTE A LA TEORÍA DE ESPACIOS DE BANACH: TEOREMA DE HAHN-BANACH, TEOREMA DE ALAOGLU-BOURBAKI, ...etc.

DEF UN SUBCONJUNTO $A \subseteq X$, X ESPACIO VECTORIAL, SE DICE CONVEXO SI $\forall x, y \in A$ Y $\forall \lambda \in (0,1)$ SE TIENE QUE

$$\alpha x + (1-\alpha) y \in A.$$



EJEMPLO: SEA $(X, \| \ \|)$ UN ESPACIO NORMADO

B_X Y $\overline{B_X}$ SON CONVEXOS.

DEM SEAN $x, y \in B_X$ (E.D $\|x\| < 1$ Y $\|y\| < 1$), ENTONCES $\forall \alpha \in (0,1)$

$$\|\alpha x + (1-\alpha) y\| \leq \alpha \|x\| + (1-\alpha)\|y\| <$$
$$\leq \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

LUEGO $\alpha x + (1-\alpha) y \in B_X$.

DEF SEA $(X \| \ \|)$ ESPACIO NORMADO Y $A \subseteq X$. SE LLAMA ENVOLTURA CONVEXA DE A $\operatorname{Co} A$, AL MENOR CONJUNTO CONVEXO $B \subseteq X$ TAL QUE $A \subseteq B$.

PROPOSICIÓN SEA $(X, \| \ \|)$ ESPACIO NORMADO Y $A \subseteq X$.

a) $\operatorname{Co} A = \displaystyle\bigcap_{\substack{A \subseteq B \\ B \text{ convexo}}} B$. (DEFINICIÓN)

(PRÁCTICA) b) $\operatorname{Co} A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ ; \ n \in \mathbb{N}, \ x_1 \dots x_n \in A \ \text{y} \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0 \right\}$.

c) SI A ES CONVEXO $\Rightarrow$ $\overline{A}$ ES CONVEXO

d) SI X ES UN ESPACIO DE BANACH Y A ES COMPACTO. ENTONCES $\overline{\operatorname{Co} A}$ ES CONVEXO Y COMPACTO. (TEOR. DE MAZUR)

DEM

a) ES EVIDENTE QUE $\bigcap_{\substack{A \subseteq B}} B$ ES CONVEXO, QUE CONTIENE A "A" Y QUE NO EXISTE OTRO "CONVEXO" MENOR, EN EL SENTIDO DE LA INCLUSIÓN, QUE CONTENGA A "A".

b) SEA $C = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_1 \dots x_n \in A, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \text{ y } \lambda_i \geq 0 \}$

CLARAMENTE $A \subseteq C$ (TOMAR $n = 1$, $\lambda_1 = 1$) Y C ES CONVEXO.

$(\alpha (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) + (1-\alpha) (\sum_{i=1}^{m} \beta_i y_i) \in C$ YA QUE

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{m} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha \lambda_i + \sum_{i=1}^{m} (1-\alpha) \beta_i = 1.$$

SEA B CONVEXO CON $A \subseteq B \Rightarrow C \subseteq B$.

POR INDUCCION

$n = 2$ $\quad \alpha x + (1-\alpha) y \in B \quad \forall \alpha \in (0,1)$ Y $\forall x, y \in A$

SI CIERTO PARA $n-1$

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} x_i \quad \text{Y} \quad \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} = 1.$$

ASI $y \in B$.

c) SEAN $x, y \in \overline{A}$; EXISTEN $(x_n), (y_n) \subseteq A$ CON

$$x_n \longrightarrow x$$
$$y_n \longrightarrow y.$$

Ejercicio 5 - HOJA 6:

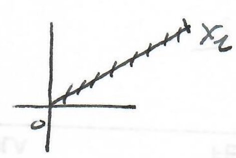
SEA $\alpha \in (0,1)$, $\alpha x_n + (1-\alpha) y_n \in A$ Y POR LA CONTINUIDAD DE SUMA Y PRODUCTO $\alpha x_n + (1-\alpha) y_n \longrightarrow \alpha x + (1-\alpha) y \in \overline{A}$.

d) $A \subseteq X$ COMPACTO LUEGO PARA $\varepsilon > 0$

$\exists\, x_1 \dots x_k \in A$ CON

$$A \subseteq \underbrace{\{x_1 \dots x_k\}}_{F} + \frac{\varepsilon}{2} B_X = \bigcup_{i=1}^{k} B_{x_i}(\varepsilon/2)$$

SEA $S_i = \{ \alpha x_i : \alpha \in [0,1] \}$



S_i SON CONJUNTOS CONVEXOS Y COMPACTOS Y $0 \in \bigcap_{i=1}^{k} S_i$

ASI $S = S_1 + S_2 + \dots + S_k$ ES UN CONJUNTO CONVEXO Y COMPACTO CON $\{x_1 \dots x_k\} \subseteq S$.

EXISTE POR TANTO $G \subseteq S$ FINITO CON

$$S \subseteq G + \frac{1}{2}\varepsilon B_X. \qquad \text{ASÍ}$$

$$A \subseteq F + \frac{1}{2}\varepsilon B_X \subset S + \frac{1}{2}\varepsilon B_X \subset G + \frac{1}{2}\varepsilon B_X + \frac{1}{2}\varepsilon B_X =$$

$\{x_1, \dots x_n\}$

$$= G + \varepsilon B_X.$$

COMO S Y $\frac{1}{2}\varepsilon B_X$ SON CONVEXO, $S + \frac{1}{2}\varepsilon B_X$

ES CONVEXO Y ASÍ

$$\operatorname{co} A \subseteq S + \frac{1}{2}\varepsilon B_X \subseteq G + \varepsilon B_X.$$

DE AQUÍ SE SIGUE(*) QUE $\operatorname{co} A$ ES PRECOMPACTO

Y POR TANTO $\overline{\operatorname{co}}\, A$ ES COMPACTO.

* <u>LEMA</u> SEA $A \subseteq (X \| \|)$, $(X \| \|)$ ESPACIO DE <u>BANACH</u>

Y A TAL QUE $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_1 \dots x_k \in X$ CON

$$A \subseteq \{x_1 \dots x_k\} + \varepsilon B_X$$

ENTONCES A ES PRECOMPACTO. (PROBLEMA 6 HOJA 6)

<u>DEM</u> SEA $(y_n) \subseteq A$.

$\exists\ (y_{n,1})$ SUBSUCESIÓN CON $(y_{n,1}) \subseteq B_{S_1}(1)$.

$\exists\ y_{n,2}$ " CON $(y_{n,2}) \subseteq B_{S_2}(1/2)$

$\vdots$

$\exists\ y_{n,k}$ " CON $y_{n,k} \subseteq B_{S_k}(\frac{1}{k})$

$\vdots$

etc

SEA LA SUBSUCESIÓN $y_{n,n}$. (PROCESO DE CANTOR)

ASÍ $(y_{n,n})$ ES UNA SUCESIÓN DE CAUCHY

$(\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \frac{1}{n_0} < \varepsilon/2$ Y $\forall n \geq n_0$

$y_{n,n} \in B_{S_{n_0}}(\frac{1}{n_0})$ ASÍ $\forall n, m \geq n_0$

$\| y_{m,m} - y_{n,n} \| \leq \| y_{m,m} - S_{n_0} \| + \| S_{n_0} - y_{n,n} \| \leq \varepsilon.$)

POR SER X BANACH $(y_{n,n})$ ES CONVERGENTE //.