ESPACIO DE OPERADORES

DEF DADO UN OPERADOR $T: X \longrightarrow Y$ SOBRE ESPACIOS NORMADOS, T LINEAL Y CONTINUO, SE LLAMA NORMA DEL OPERADOR A

$$\|T\| \overset{DEF}{=} \inf\{k>0 : \|T(x)\| \leq k\|x\| \ \forall x \in X\} \overset{(1)}{=} \sup\{\|T(x)\|_Y : x \in \overline{B_X}\}.$$

OBSERVACION •) VEAMOS QUE (1) ES CIERTO. (EJERCICIO?)

SI $\|T(x)\| \leq k\|x\| \ \forall x \in X$, ENTONCES

k ES UNA COTA SUPERIOR DE $\{\|T(x)\| \ x \in \overline{B_X}\}$

Y ASÍ $\sup\{\|T(x)\|_Y : x \in \overline{B_X}\} \leq \|T\|$.

POR OTRO LADO SE $\alpha = \sup\{\|T(x)\|_Y : x \in \overline{B_X}\}$.

ASI $\forall x \in X \quad \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\| = \frac{1}{\|x\|_X}\|T(x)\| \leq \alpha$

Y ASÍ $\alpha \geq \|T\|$. LO QUE PRUEBA (1)

••) SE VE QUE $\|T(x)\| \leq \|T\|\,\|x\| \quad \forall x \in X$.

•••) EN LA FRASE ANTERIOR APARECEN UN MISMO SIMBOLO TRES VECES PERO CON SIGNIFICADO DISTINTO

DEF SEAN X E Y ESPACIOS NORMADOS Y SE DEFINE EL ESPACIO DE OPERADORES ENTRE AMBOS

$$B(X,Y) = \{T: X \longrightarrow Y : T \text{ LINEAL Y CONTINUA}\}$$

PROPOSICION SI X E Y SON ESPACIOS NORMADOS

a) $B(X,Y)$ ES UN ESPACIO NORMADO

b) SI Y ES BANACH, ENTONCES $B(X,Y)$ ES BANACH.

DEF EL ESPACIO $X' = B(X,\mathbb{K}) = \{f: X \to \mathbb{K} \text{ FUNCIONAL}\}$ ES UN ESPACIO DE BANACH QUE SE LLAMA ESPACIO DUAL DE X.

DEM a) CLARAMENTE $B(X,Y)$ ES UN ESPACIO VECTORIAL Y LA NORMA OPERADOR ES UNA NORMA SOBRE $B(X,Y)$ (EJERCICIO).

b) SEA $(T_n) \subseteq B(X,Y)$ UNA SUCESIÓN DE CAUCHY.

ASÍ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : n, m \geq n_0 \Rightarrow \|T_n - T_m\| < \varepsilon$.

$\forall x \in B_X$ $\quad \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \varepsilon$ ES DECIR

$(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ ES UNA SUCESIÓN DE CAUCHY EN Y;

POR SER Y COMPLETO $\exists T(x) \in Y$ CON

$$T_n(x) \xrightarrow{\|\,\|_Y} T(x) \quad \forall x \in B_X.$$

POR LINEALIDAD $\left(\frac{x}{\|x\|_X} \in B_X\right)$. $\quad T_n(x) \xrightarrow{\|\,\|_Y} T(x) \quad \forall x \in X$

<u>T ES LINEAL</u> $\quad T_n(\lambda x + y) = \lambda T_n(x) + T_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda T(x) + T(y)$

$\downarrow n \to \infty$

$T(\lambda x + y)$. $\quad \forall x, y \in X$ Y $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

<u>T ES CONTINUA.</u> POR SER (T_n) SUCESIÓN DE CAUCHY ESTÁ ACOTADA I.E. $\exists M > 0$ CON $\|T_n\| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

SEA $x \in B_X$ Y SEA $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 : n \geq n_0$

$$\|T_n(x) - T(x)\| \leq \varepsilon.$$

ASÍ $\|T(x)\| \leq \|T(x) - T_{n_0}(x)\| + \|T_{n_0}(x)\| \leq \varepsilon + M$.

COMO LO ANTERIOR ES CIERTO $\forall \varepsilon > 0$

$\|T\| \leq M$, ASÍ T ESTÁ ACOTADA Y ES CONTINUA.

<u>$T_n \xrightarrow{\|\,\|} T$</u> $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : m, n \geq n_0 \Rightarrow \|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \varepsilon$

$\forall x \in B_X$, ASÍ TOMANDO LÍMITES EN $m \to \infty$

$$\|T(x) - T_n(x)\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in B_X.$$

ASÍ $\|T - T_n\| \leq \varepsilon$ $\quad \forall n \geq n_0$ $\quad$ c.q.d

<u>OBSERVACIÓN</u> SI $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ O $\mathbb{C}$ ESPACIO COMPLETO, ENTONCES EL ESPACIO DUAL X' DE UN ESPACIO NORMADO X SIEMPRE ES UN ESPACIO DE BANACH.