INVERSIÓN DE OPERADORES

EJEMPLO:

SEA LA ECUACIÓN DE FREDHOLM.

$$f(s) = \int_0^1 k(s,t)\, f(t)\, dt + g(s). \qquad (*)$$

CON $g \in C[0,1]$ Y $K \in C([0,1]\times[0,1])$.

SABEMOS QUE EL OPERADOR DE FREDHOLM

$$\begin{aligned} T: C[0,1] &\longrightarrow C[0,1] \\ f &\longrightarrow Tf(s) = \int_0^1 k(s,t)\, f(t)\, dt \end{aligned}$$

ES UN OPERADOR LINEAL Y CONTINUO

$$\begin{aligned} I: C[0,1] &\longrightarrow C[0,1] \\ f &\longrightarrow I(f) = f \end{aligned}$$

TAMBIEN ES LINEA Y CONTINUO.

ASI $(*)$ SE PUEDE ESCRIBIR COMO

$$(T - I) f = g$$

DONDE $T - I \in B(C[0,1]) = B(C[0,1], C[0,1])$.

SOBRE $B(C[0,1])$ SE PUEDE ESTABLECER LA OPERACIÓN DE COMPOSICIÓN (ASI $B(C[0,1])$ TIENE ESTRUCTURA DE ALGEBRA).

SI EXISTIESE $(T - I)^{-1}$ LA ECUACIÓN $(*)$ TENDRÍA SOLUCIÓN ÚNICA. ESTO NO SIEMPRE ES POSIBLE, PERO SE PUEDEN BUSCAR CONDICIONES SUFICIENTE PARA QUE ESTO OCURRA.

DEFINICIÓN Sea X un espacio de Banach y sea $B(X)$ el espacio de Banach de l.c. operadores de X en sí mismo.

Un operador $T \in B(X)$ se dice invertible si existe $S \in B(X)$ ($S \overset{Not}{=} T^{-1}$) tal que

$$S \circ T = T \circ S = I.$$

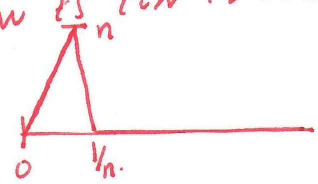
OBSERVACIÓN Si $T: X \to Y$ es lineal y biyectiva, existe T^{-1} lineal, aunque no tiene porque ser continua, aun siéndolo T

$$I \quad (C[0,1] \; \|\;\|_\infty) \longrightarrow (C[0,1] \; \|\;\|_1)$$
$$f \longrightarrow f.$$

I es continua $\quad \|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$.

$I^{-1} = I$ no es continua.

Sea f_n



$\|f_n\|_1 = 1/2 \in B_{(C[0,1] \|\;\|_1)}$

$\|f_n\|_\infty = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$

Esto ocurre por no ser $(C[0,1] \; \|\;\|_1)$ completo.

OBSERVACIÓN El teorema de la aplicación abierta nos dice que si $T: X \to Y$, Y espacio de Banach, nos dice que si T es lineal, continua y biyectiva, entonces T^{-1} es continua.

LEMA. La composición de operadores sobre $B(X)$, con X espacio de Banach, es una operación continua y $\|S \circ T\| \leq \|S\| \, \|T\| \quad \forall S, T \in B(X)$

DEM $\circ$ $\quad B(X) \times B(X) \longrightarrow B(X) \qquad$ Sea $\|(S,T)\| = \max(\|S\|, \|T\|)$
$\quad (S,T) \longrightarrow S \circ T \qquad$ norma producto usual.

Si $S_n \to S$ y $T_n \to T$

$$\|S \circ T - S_n \circ T_n\| \leq \|S \circ T - S \circ T_n\| + \|S \circ T_n - S_n \circ T_n\| \leq$$
$$\leq \|S \circ (T - T_n)\| + \|(S - S_n) \circ T_n\| \leq$$
$$\leq \|S\| \, \|T - T_n\| + \|S - S_n\| \, \|T_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ya que $\|S \circ T\| = \sup\{\|S \circ T(x)\| \;\; x \in B_X\} \leq \sup\{\|S\| \, \|T(x)\| \;\; x \in B_X\} =$
$= \|S\| \, \|T\|. \qquad$ c.q.d.

TEOREMA (DE EXPANSIÓN DE NEUMANN).(*) SE X UN ESPACIO DE BANACH Y SEA $T \in \mathcal{B}(X)$. SI $\|T\| < 1$, ENTONCES $T - I$ ES INVERTIBLE (O LO QUE ES EQUIVALENTE, SI $\|T + I\| < 1$, T ES INVERTIBLE)

DEM SI $\|T\| < 1 \Rightarrow \|T^n\| \leq \|T\|^n$.

ASÍ $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n < \infty$.

POR SER X ESPACIO DE BANACH, $\mathcal{B}(X)$ ES COMPLETO Y POR LA CARACTERIZACIÓN DE LA COMPLECIÓN SE SIGUE QUE

$$S \overset{\text{DEF}}{=} -\sum_{n=0}^{\infty} T^n = -(I + T + T^2 + \dots) \in \mathcal{B}(X)$$

AHORA

$$-(I + T + \dots + T^n)(T - I) = I - T^{n+1} = -(T - I)(I + T + \dots + T^n)$$

POR EL LEMA ANTERIOR $\|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

TOMANDO LÍMITES

$$S \circ (T - I) = I = (T - I) \circ S.$$

LO QUE PRUEBA QUE $T - I$ ES INVERSIBLE

EJEMPLO SEA $f(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t)\, dt + g(s)$ LA ECUACIÓN DE FREDHOLM CON $\|k(s,t)\|_\infty < 1$, ENTONCES

$$\|Tf\| = \left\| \int_0^1 k(s,t) f(t) \right\| \leq \|f\|_\infty \|k(s,t)\|_\infty < \|f\|_\infty$$

Y ASÍ $T - I$ ES INVERTIBLE POR EL TEOREMA ANTERIOR. Y

$$f = (I + T + T^2 + \dots + T^n + \dots)(g)$$

ES LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN.

(*) MÉTODO DE LOS NÚCLEOS DE VOLTERRA; VER HOJA EJERCICIOS
ESTOS PROCEDIMIENTOS, VÍA EL ANÁLISIS INFINITESIMAL (O TROPICAL), PERMITE APROXIMAR E.D.P QUE SE USAN EN TEORÍA DE CONTROL (VER ARTÍCULO DETRÁS).

ISOMORFISMOS

UN PROBLEMA TEÓRICO IMPORTANTE, Y TÍPICO, ES DETERMINAR CUANDO DOS ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS Y/O TOPOLÓGICAS SON "EQUIVALENTES"

DEF a) UN OPERADOR LINEAL $T: X \to Y$ ENTRE DOS ESPACIOS NORMADOS. SE LLAMA ISOMORFISMO SI ES BIYECTIVA Y ES UN HOMEOMORFISMO TOPOLÓGICO (E.D. T Y T^{-1} SON CONTINUAS).

b) SE DICE QUE UN OPERADOR LINEAL $T: X \to Y$ ENTRE DOS ESPACIOS NORMADOS ES UNA ISOMETRÍA SI

$$\|T(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in X.$$

OBSERVACIÓN:

·) TODA ISOMETRÍA ES INYECTIVA Y CONTINUA.

$\|T\| \le 1$, ACOTADA LUEGO CONTINUA

ADEMÁS SI $T(x) = T(y) \Rightarrow \|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| = 0$

$\Rightarrow x = y$

·) TODA ISOMETRÍA BIYECTIVA ES UN ISOMORFISMO.

DEF DOS ESPACIOS NORMADOS X E Y SE LLAMAN ISOMORFOS SI EXISTE $T: X \to Y$ ISOMORFISMO

DEF DOS NORMAS $\|\ \|_1$ Y $\|\ \|_2$ SOBRE UN MISMO ESPACIO VECTORIAL X SE DICEN EQUIVALENTES SI $\exists C > 0$ TAL QUE

$$\frac{1}{C} \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C \|x\|_1 \quad \forall x \in X.$$

PROPOSICIÓN: SEA X UN ESPACIO VECTORIAL Y $\| \|_1$ Y $\| \|_2$ DOS NORMAS DEFINIDAS SOBRE X. SON EQUIVALENTES

a) $I \ (X, \| \|_1) \longrightarrow (X, \| \|_2)$ ES UN ISOMORFISMO

b) LAS NORMAS $\| \|_1$ Y $\| \|_2$ SON EQUIVALENTES.

DEM

a $\Rightarrow$ b) I ES BIYECTIVA Y BICONTINUA, ASÍ

$\exists k_1 > 0$ CON $\|x\|_2 \leq k_1 \|x\|_1 \quad \forall x \in X$

$\exists k_2 > 0$ CON $\|x\|_1 \leq k_2 \|x\|_2 \quad \forall x \in X$.

SI $k = \max(k_1, k_2)$ (ASÍ $\frac{1}{k} \leq \min\{\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}\}$)

$$\frac{1}{k} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq k \|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

b $\Rightarrow$ a) ES EVIDENTE POR LA CARACTERIZACIÓN DE LA CONTINUIDAD POR ACOTACIÓN.

PROPOSICIÓN SEAN $(X, \| \|_X)$ $(Y, \| \|_Y)$ DOS ESPACIOS NORMADOS Y $T\ X \to Y$ UNA APLICACIÓN LINEAL Y BIYECTIVA.

a) SI SE DEFINE $\|y\|_1 = \|T^{-1}(y)\|_X \quad \forall y \in Y$, ENTONCES $\| \|_1$ ES UNA NORMA SOBRE Y Y $T \ (X \ \| \|_X) \longrightarrow (Y \ \| \|_1)$ ES UNA ISOMETRÍA.

b) SI T ES, ADEMÁS, UN ISOMORFISMO, SE TIENE QUE $\| \|_Y$ Y $\| \|_1$ SON NORMAS EQUIVALENTES.