EJEMPLOS DE ESPACIOS DE BANACH.

CONOCEMOS ALGUNOS EJEMPLOS DE ESPACIOS DE BANACH.

$(\mathbb{R}^n \ \|\ \|_2)$ (Ó CON NORMAS $\|\ \|_1$ Y $\|\ \|_\infty$).

$(C[0,1] \ \|\ \|_\infty)$

$(\ell_1, \|\ \|_1)$

$(\ell_\infty, \|\ \|_\infty)$

$(c_0, \|\ \|_\infty)$.

VAMOS A DESCRIBIR OTROS EJEMPLOS MUY COMUNES DE ESPACIOS DE BANACH.

- LOS QUE TIENEN DIMENSIÓN FINITA. QUE SON ESENCIALMENTE $(\mathbb{R}^n \ \|\ \|_2)$
- LOS ESPACIOS $L_p(\Omega)$. $1 \leq p \leq \infty$ CON $(\Omega \ \Sigma \ \mu)$ UN ESPACIO DE MEDIDA (AUNQUE TRABAJAREMOS CON $\Omega = [0,1]$ Ó $\mathbb{R}$ CON LA MEDIDA DE LEBESGUE)
- EJEMPLOS IMPORTANTES SON
  - $L_1(\mathbb{R})$. DONDE SE DEFINE LA TRANSFORMADA DE FOURIER – TEORÍA DE LA SEÑAL
  - $L_2([0,1])$. EJEMPLO TÍPICO DE ESPACIO DE HILBERT. – MECÁNICA CUÁNTICA.

ESPACIOS NORMADOS DE DIMENSIÓN FINITA

SEA E UN ESPACIO NORMADO DE DIMENSIÓN FINITA n.
ASI E Y $\mathbb{K}^n$ SON ISOMORFOS COMO ESPACIOS VECTORIALES

VEAMOS QUE SON ISOMORFOS COMO ESPACIOS NORMADOS

SABEMOS QUE SOBRE $\mathbb{K}^n$

$$\|x\|_\infty = \max |x_i| \ : 1 \le i \le n|$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

SON NORMAS EQUIVALENTES SOBRE $\mathbb{K}^n$.

$$\frac{1}{n} \|x\|_1 \le \|x\|_\infty \le \|x\|_1$$

Y

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_2 \le \|x\|_\infty \le \|x\|_2$$

LEMA SEA $(X, \| \ \|)$ UN ESPACIO NORMADO DE DIMENSIÓN n. SEA $T: (\mathbb{K}^n, \| \ \|_\infty) \longrightarrow (X, \| \ \|)$ UNA APLICACIÓN LINEAL. T ES CONTINUA

DEM SEA $e_i = (0 \ldots 1 0 \ldots 0)$ $i = 1 \ldots n$ BASE CANÓNICA DE $\mathbb{K}^n$.

SI $x = (x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{K}^n \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

ASI $\|Tx\| = \|T(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i)\| \le$

$$\le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|T(e_i)\| \le \|x\|_\infty \left(\sum_{i=1}^{n} \|T(e_i)\| \right)$$

LUEGO T ESTA ACOTADA CON NORMA OPERADOR

$$\|T\| \le \left(\sum_{i=1}^{n} \|T(e_i)\| \right)$$

LEMA a) SEA $(\mathbb{K}^n \| \ \|)$ Y SEA LA IDENTIDAD $I\ (\mathbb{K}^n \| \ \|_\infty) \to (\mathbb{K}^n, \| \ \|)$
I ES UN ISOMORFISMO Y POR TANTO LAS NORMAS $\| \ \|_\infty$ Y $\| \ \|$ SON EQUIVALENTES.

b) SI X ES UN ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSIÓN FINITA CUALQUIER PAR DE NORMAS SOBRE EL SON AMBAS EQUIVALENTES

c) TODA NORMA SOBRE $\mathbb{K}^n$ ES EQUIVALENTE A $\| \ \|_2$.

DEM a) $I (\mathbb{K}^n \| \|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{K}^n, \| \|)$ ES UNA BIYECCIÓN CONTINUA, POR EL LEMA ANTERIOR

$S_{(\mathbb{K}^n \| \|_\infty)} = \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_\infty = 1\}$ ES UN CONJUNTO CERRADO Y ACOTADO (LAS TOPOLOGÍAS DADAS POR $\| \|_\infty$ Y $\| \|_2$ SON LA MISMA) POR SER I CONTINUA

$(S_{\mathbb{K}^n \| \|_\infty})$ ES UN COMPACTO EN $(\mathbb{K}^n \| \|)$

COMO $0 \notin (S_{\mathbb{K}^n \| \|_\infty})$ $\exists \varepsilon > 0$ Y $B_0^{\| \|}(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\| < \varepsilon\}$

CON $B(0, \varepsilon) \cap S_{(\mathbb{K}^n \| \|_\infty)} = \emptyset$

ASÍ $\forall x \in \mathbb{K}^n$ $\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \geq \varepsilon$ $\Rightarrow$

$\|x\| \geq \varepsilon \|x\|_\infty$ Y ASÍ

$\|x\|_\infty \leq 1/\varepsilon \, \|x\|$ (I^{-1} ES CONTINUA)

b) SEAN $\| \|_a$ Y $\| \|_b$ DOS NORMAS SOBRE X

SEA $J\ X \longrightarrow \mathbb{K}^n$ ES ISOMORFISMO CANÓNICO

SEA $J (X \| \|_a) \longrightarrow (\mathbb{K}^n \| \|_a)$ ES UN ISOMORFISMO

(ASÍ $J (X \| \|_a)$ SI $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_a \overset{\text{DEF}}{=} \|J^{-1}(x)\|_a$).

ASÍ $J (X \| \|_a) \longrightarrow (\mathbb{K}^n \| \|_a) \xrightarrow{I} (\mathbb{K}^n \| \|_b) \xrightarrow{J^{-1}} (X \| \|_b)$

$J^{-1} \circ I \circ J = I$ IDENTIDAD SOBRE X ES UN ISOMORFISMO ENTRE ESPACIOS NORMADOS POR SERLO J^{-1}, I Y J.

c) APLICAR b) A $\mathbb{K}^n$.

TEOREMA UN ESPACIO NORMADO $(X \|\ \|)$ ES DE DIMENSIÓN FINITA SI Y SÓLO SI $\overline{B_X} = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ ES UN COMPACTO.

DEM

$\Rightarrow)$ SI $\dim X = n \in \mathbb{N}$.

$$J\,(X \|\ \|) \longrightarrow (\mathbb{K}^n \|\ \|) \text{ ES UN ISOMORFISMO}$$

CON J EL ISOMORFISMO CANÓNICO ALGEBRAICO.

ASÍ $J(\overline{B_X})$ ES UN CERRADO Y ACOTADO DE $(\mathbb{K}^n \|\ \|)$ Y POR TANTO DE $(\mathbb{K}^n \|\ \|_2)$ (LEMA ANTERIOR). ASÍ ES COMPACTO EN $(\mathbb{K}^n \|\ \|_2)$ Y POR TANTO EN $(\mathbb{K}^n \|\ \|)$

$J^{-1} \circ J(\overline{B_X}) = \overline{B_X}$ ES COMPACTO (J^{-1} CONTINUA)

$\Leftarrow)$ SI $\overline{B_X}$ ES COMPACTO, EXISTEN $x_1 \dots x_k \in X$

CON $\overline{B_X} \subset (x_1 + \frac{1}{2}B_X) \cup \dots \cup (x_n + \frac{1}{2}B_X) = \bigcup_{i=1}^{k} B_{x_i}(1/2)$.

SEA $Y = [x_i]$ ES SUBESPACIO VECTORIAL ENGENDRADO POR $x_1 \dots x_k$

ASÍ $\dim Y \le K$. Y POR TANTO $(Y \|\ \|)$ ES UN SUBESPACIO CERRADO (COMPLETO) DE X (POR TENER $(\mathbb{K}^{\dim Y} \|\ \|) \simeq (Y \|\ \|)$.) Y DIMENSIÓN FINITA

PUESTO QUE $\overline{B_X} \subset Y + 1/2\, B_X$ Y

$$\lambda Y = Y \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

SE TIENE $\frac{1}{2}\overline{B_X} \subset Y + \frac{1}{4}B_X \Rightarrow \overline{B_X} \subset Y + \frac{1}{4}B_X$

$\frac{1}{2}\overline{B_X} \subseteq Y + \frac{1}{4}B_X \subseteq Y + \frac{1}{4}(Y + 1/2\, B_X) = Y + \frac{1}{8}B_X$

LUEGO $\overline{B_X} \subseteq Y + \frac{1}{4}B_X$).

REPITIENDO EL PROCESO $\overline{B_X} \subseteq Y + 2^{-n}B_X \quad \forall n \ge 1$

ASÍ $\overline{B_X} \subseteq \bigcap_{n \ge 1} \{Y + 2^{-n}B_X\} = \underbrace{\overline{Y}}_{\text{EJERCICIO}} = Y$

LUEGO $\overline{B_X} \subseteq Y \Rightarrow Y = X$. c.q.d —— ◦ ——

<u>OBSERVACIÓN</u> EN ESPACIOS COMO $C[0,1]$ $L_1[0,1]$ ó $L_2[0,1]$, IMPORTANTES PARA LAS APLICACIONES NO PODEMOS ESPERAR QUE SU BOLA UNIDAD SEA COMPACTA

ESPACIOS ℓ_p

DEF $\ell_p = \{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty \}$.

(SIENDO p UN NÚMERO FIJO DE $[1, \infty)$)

OBSERVACIÓN: PARA $p=1$ TENEMOS EL ESPACIO DE BANACH ℓ_1

- CONOCEMOS ℓ_∞
- PARA $p=2$ TENEMOS EL ESPACIO DE HILBERT ℓ_2

UNO DE LOS PRIMEROS EJEMPLOS DE ESPACIOS DE BANACH.

OBSERVACIÓN: ℓ_p ES UN ESPACIO VECTORIAL

- OBVIAMENTE $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ES UN ESPACIO VECTORIAL
- SI $x \in \ell_p$ Y $\lambda \in \mathbb{K}$ ES CLARO QUE

$$\|\lambda x\|_p = |\lambda| \cdot \|x\|_p$$

- SI $(x_n), (y_n) \in \ell_p$

$$|x_n + y_n|^p \leq (2 \max |x_n|, |y_n|)^p \leq 2^p |x_n|^p + 2^p |y_n|^p$$

ASÍ $\|(x_n+y_n)\|_p \leq 2 \left(\|(x_n)\|_p + \|(y_n)\|_p \right)$.

Y $(x_n+y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$.

TENEMOS QUE VER QUE $\| \ \|_p$ ES UNA NORMA

LEMA SEAN $0<\alpha<1$ y $a \geq 0, b \geq 0$, ENTONCES

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha) b.$$

DEM SI $a=0$ Ó $b=0$ Ó $a=b$ EL RESULTADO ES CLARO

SEA $0<b<a$ ENTONCES

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha) b \iff \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha \leq \alpha \left(\frac{a}{b}\right) + (1-\alpha)$$

$$\iff x^\alpha \leq \alpha x + (1-\alpha) \quad \forall x>1 \iff$$

$$\iff x^\alpha - 1 \leq \alpha (x-1) \quad \forall x>1.$$

PERO SI $x>1$ POR EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

$$x^\alpha - 1 = \alpha \, \xi^{\alpha-1} (x-1) \leq \alpha (x-1) \quad \forall x>1$$

$\xi \in (1, x)$. c.q.d.

DEM

a_1) SI $a \notin \ell_p$ o $b \notin \ell_q$ NO HAY NADA QUE PROBAR PUES $\|a\|_p$ o $\|b\|_q$ ES INFINITO.

AHORA SI $a \in \ell_p$ y $b \in \ell_q$ $\|a\|_p, \|b\|_q \in (0,\infty)$.

SEA $c_n = \dfrac{|a_n|^p}{\|a\|_p^p}$ $d_n = \dfrac{|b_n|^q}{\|b\|_q^q}$ y $\alpha = \frac{1}{p}$ $(1-\alpha) = \frac{1}{q}$.

POR EL LEMA ANTERIOR.

$$\frac{|a_n b_n|}{\|a\|_p \|b\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|a_n|^p}{\|a\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|b_n|^q}{\|b\|_q^q}$$

SUMANDO

$$\frac{1}{\|a\|_p\|b\|_q} \sum |a_n b_n| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \|a\|_p \|b\|_q$$

a_2) ES EL CASO SENCILLO.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \|b\|_\infty = \|a\|_1 \|b\|_\infty.$$

b) DE NUEVO SI $a \notin \ell_p$ o $b \notin \ell_p$ LA DESIGUALDAD ES CIERTA (EL CASO $a=0$ ó $b=0$ TAMBIÉN ES CLARO).

EN OTRO CASO.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n+b_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||a_n+b_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|.|a_n+b_n|^{p-1} \leq$$

$|a_n+b_n| \leq |a_n|+|b_n|$.

AHORA COMO $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, ASÍ $(p-1)q = p$,

COMO $(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \Rightarrow \left((a_n+b_n)^{p-1}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q$

APLICANDO LA DESIGUALDAD DE HÖLDER

$$\leq \|a\|_p \|(a_n+b_n)^{p-1}\|_q + \|b_n\|_p \|(a_n+b_n)^{p-1}\|_q$$

ASÍ $\|(a_n+b_n)\|_p^p \leq (\|a\|_p + \|b\|_p)(\|a+b\|_p^{p/q})$

ASÍ $\|(a_n+b_n)\|_p^{p-p/q} \leq \|a\|_p + \|b\|_p$ COMO $p - p/q = 1$.

SE TIENE EL RESULTADO

PROPOSICIÓN (DESIGUALDAD DE JENSEN)

SEAN $1 < p < q < \infty$. ENTONCES

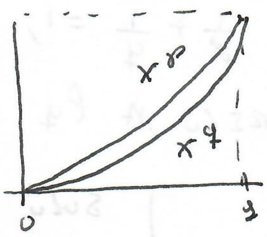
$$\ell_1 \hookrightarrow \ell_p \hookrightarrow \ell_q \hookrightarrow \ell_\infty$$ Y TALES INCLUSIONES

SON CONTINUAS ES DECIR

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq \|x\|_1 \quad \forall x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}.$$

DEM SI $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p$, ENTONCES $\left|\frac{x_n}{\|x\|_p}\right| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Y ASI $\left|\frac{x_n}{\|x\|_p}\right|^q \leq \left|\frac{x_n}{\|x\|_p}\right|^p$ Y



ASI $\sum_{n=1}^\infty \left|\frac{x_n}{\|x\|_p}\right|^q \leq \sum_{n=1}^\infty \left|\frac{x_n}{\|x\|_p}\right|^p$

$$\Rightarrow \frac{\|x\|_q^q}{\|x\|_p^q} \leq \frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^p} = 1$$

$$\Leftrightarrow \|x\|_q^q \leq \|x\|_p^q \Leftrightarrow \|x\|_q \leq \|x\|_p.$$

ASI SE TIENE QUE $\ell_p \hookrightarrow \ell_q$ CON INCLUSIÓN CONTINUA

EL CASO $\ell_1 \hookrightarrow \ell_p$ ES IGUAL $p < \infty$ (EJERCICIO).

EL CASO $\ell_p \hookrightarrow \ell_\infty$

SEA $x \in \ell_p \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : n \geq n_0$

$$\|x\|_\infty - \varepsilon < |x_n|$$

ASI $(\|x\|_\infty - \varepsilon)^p \leq |x_n|^p \leq \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$

LUEGO $\|x\|_\infty - \varepsilon \leq \|x\|_p \quad \forall \varepsilon > 0$

LUEGO $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$

ASI $x \in \ell_\infty$ Y LA DESIGUALDAD ANTERIOR

DA LA CONTINUIDAD

ESPACIOS L_p DE FUNCIONES

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida positiva y completa

Ejemplo: Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ con μ la medida de Lebesgue sobre I.

Para $1 \le p < \infty$ sea

$$\mathcal{L}_p(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{K} : |f|^p \text{ es } \mu\text{-integrable} \}$$

y se define

$$\|\ \|_p : \mathcal{L}_p(\Omega) \longrightarrow [0, \infty)$$

$$f \longrightarrow \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \infty$$

$\Downarrow$

$f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$.

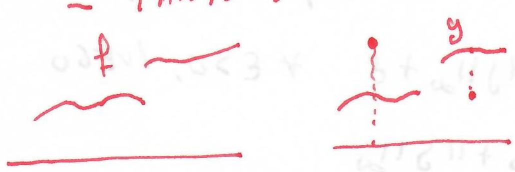
$\boxed{\text{Para } p = \infty}$

$$\mathcal{L}_\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{K} : \mu\text{-medibles con } \|f\|_\infty < \infty \}$$

donde $\|f\|_\infty = \inf\{ a \ge 0 : \mu\{t : |f(t)| > a\} = 0 \}$.

Observación: continua en Ω.

- Como f no es necesariamente [continua en Ω] un compacto no podemos asegurar que f alcanza un máximo
- Tanto en $\|\ \|_p$ como en $\|\ \|_\infty$ si $f = g$ μ-c.t.p.



$\|f\|_p = \|g\|_p$

$\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$ algo tendremos que hacer para cuadrar las condiciones de norma de $\|\ \|_p$ y $\|\ \|_\infty$.

Proposición: $\mathcal{L}_p(\Omega)$ es un espacio vectorial $1 \le p \le \infty$.

Dem: Sea $\mathcal{L}(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \ \mu\text{-medible} \}$ $\forall f, g \in \mathcal{L}(\Omega)$ y $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\lambda f + g \in \mathcal{L}(\Omega)$.

SOBRE $\mathcal{L}(\Omega)$ VAMOS A CONSIDERAR LA RELACIÓN

$$f \, R \, g \overset{DEF}{\iff} f \equiv g \quad \mu\text{-ctp}.$$

R ES UNA RELACIÓN DE EQUIVALENCIA (EJERCICIO)

Y SEA $L(\Omega) = \mathcal{L}(\Omega)/R$ ES ESPACIO VECTORIAL COCIENTE

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_p(\Omega) = \{ f: \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty \} \\ f \overset{R}{\sim} g \iff \int_\Omega |f-g|^p d\mu = 0 \end{array} \right.$$

DEF SI $1 \le p < \infty$

$$L_p(\Omega) = \{ f \in \mathcal{L}(\Omega)/R : \|f\|_p < \infty \}.$$

OBSERVAR QUE SI $f \equiv g$ μ-ctp $\Rightarrow \|f\|_p = \|g\|_p$.

$$L_\infty(\Omega) = \{ f \in \mathcal{L}(\Omega)/R : \|f\|_\infty < \infty \}.$$

PROPOSICIÓN $(L_\infty(\Omega), \| \, \|_\infty)$ ES UN ESPACIO DE BANACH.

DEM $\| \, \|_\infty$ ES UNA NORMA

- SI $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \mu\{t : |f(t)| > \varepsilon\} = 0$

ASÍ $\mu\{t : |f(t)| \neq 0\} = \mu \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t : |f(t)| > 1/n\} \le$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{t : |f(t)| > 1/n\} = 0$$

LUEGO $f \equiv 0$ μ-ctp, LUEGO $f = 0$ EN L_∞.

- EN LA PROPOSICIÓN ANTERIOR SE VIO EL RESTO DE PROPIEDADES DE LA NORMA
- PARA VER QUE $L_\infty(\Omega)$ ES COMPLETO. SEA $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq L_\infty(\Omega)$

CON $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$, ASÍ $\forall t \in \Omega$

$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)| < \infty$ μ-ctp Y ASÍ $\exists \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = f(t)$ μ-ctp

COMO $\|f\|_\infty \le \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty \Rightarrow f \in L_\infty(\Omega)$.

Y $\|f(t) - \sum_{n=1}^{N} f_n(t)\|_\infty = \|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(t)\|_\infty \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

LO QUE PRUEBA QUE $\sum_{n=1}^{\infty} f \xrightarrow{\| \, \|_\infty} f$.

OBSERVACIÓN: SE PUEDE VER QUE $L_\infty(\Omega)$ ES NO SEPARABLE, SI Ω ES INFINITO

TEOREMA $(L_p(\Omega), \|\ \|_p)$ $1 \le p \le \infty$ ES UN ESPACIO DE BANACH.

DEM

SEA $1 \le p < \infty$.

SEA $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq L_p(\Omega)$ TAL QUE $\sum \|f_n\|_p = C < \infty$.

$$¿\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n \xrightarrow{\|\ \|_\infty} f \in L_p\ ?$$

SI $f_n \in L_p(\Omega)$ COMO $|f_n| \in L_p(\Omega, \mathbb{R})$

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} |f_n| \Big\|_p \le \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_p \le C.$$

ES DECIR $\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{N} |f_n|\right)^p d\mu \le C^p \quad \forall N \in \mathbb{N}$.

SEA $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)| \quad \forall t \in \Omega$, $g \in \mathcal{L}(\Omega)$

COMO $\left(\sum_{n=1}^{N} |f_n(t)|\right)^p \longrightarrow g^p(t)$ DE FORMA MONÓTONA μ-c.t.p.

ASÍ POR EL TEOREMA DE LA CONVERGENCIA MONÓTONA

$$\int_\Omega g^p \, d\mu \le C^p < \infty$$

SE SIGUE QUE g ES FINITA μ-c.t.p.

Y COMO $g \ge 0$ (ES DECIR. $\exists M$ CON $\mu(M) = 0$ TAL QUE $\forall t \in \Omega - M$, $g(t) < \infty$). ASÍ $\forall t \in \Omega - M$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE

SE PUEDE DEFINIR $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{SI } t \in M. \\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) & t \in \Omega - M. \end{cases}$

f MEDIBLE, YA QUE ES EL LÍMITE PUNTUAL DE FUNCIONES QUE LO SON, Y f ES FINITA $\forall t \in \Omega$. ADEMÁS $|f| \le g$

Y ASÍ $\int_\Omega |f|^p d\mu \le \int_\Omega |g|^p \le C^p \Rightarrow f \in L_p(\Omega)$

COMO $f(t) - \sum_{n=1}^{N} f_n(t) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ μ-c.t.p. SE TIENE QUE

$$\Big| f(t) - \sum_{n=1}^{N} f_n(t) \Big|^p \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

COMO $\left| f(t) - \sum_{n=1}^{N} f_n(t) \right|^p = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(t) \right|^p \le g^p(t)$ μ-c.t.p. POR EL TEOREMA DE LA CONVERGENCIA DOMINADA

$\exists \lim_{N\to\infty} \int_\Omega \left| f(t) - \sum_{n=1}^{N} f_n(t) \right|^p d\mu = \int_\Omega \lim_{N\to\infty} \left| f(t) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \right|^p d\mu = 0$

ASÍ $\Big\| f - \sum_{n=1}^{N} f_n \Big\|_p \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ c.q.d.

SEPARABILIDAD DE LOS ESPACIOS L_p

AUNQUE LOS RESULTADOS SON LOS MISMOS QUE PARA ℓ_p LAS PRUEBAS SON MAS DIFÍCILES.

PROPOSICIÓN: SI (Ω, Σ, μ) ES UN ESPACIO DE MEDIDA σ-FINITA, ENTONCES EL CONJUNTO S DE LAS FUNCIONES SIMPLES SOBRE Ω ES DENSO EN $L_p(\Omega)$ EN $1 \le p < \infty$

DEM SEA $S = \{ s : \Omega \to \mathbb{K} : s = \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{A_n}$ CON $a_n \in \mathbb{K}$ Y $A_n \in \Sigma$ CON $\mu(A_n) < \infty \}$

$S \subseteq L_p(\Omega)$ $\forall\, 1 \le p \le \infty$ OBVIAMENTE

AHORA SI $f \in L_p(\Omega)$ Y $f \ge 0$ EXISTE $(s_n) \subseteq S$ CON $s_n \nearrow f$ μ-c.t.p. (*) ASI $|s_n - f|^p \to 0$ μc.t.p.

COMO ADEMÁS $|s_n - f|^p \le |f|^p$ SE PUEDE APLICAR EL TEOREMA DE LA CONVERGENCIA DOMINADA Y ASI $\|s_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

SI $f(t) \in \mathbb{R}$ μ-c.t.p. $f = f^+ - f^-$ Y $\exists\, t_n \xrightarrow{\|\,\|_p} f^+$ Y $\exists\, s_n \xrightarrow{\|\,\|_p} f^-$

AHORA $s_n = t_n - r_n \xrightarrow{\|\,\|_p} f$.

SI $f(t) = f_1(t) + i f_2(t) \in \mathbb{C}$, ENTONCES $\exists\, r_n \xrightarrow{\|\,\|_p} f_1$ Y $t_n \xrightarrow{\|\,\|_p} f_2$

ASI $s_n = r_n + i s_n \xrightarrow{\|\,\|_p} f_1 + i f_2 = f$ c.q.d

(*) RESULTADO DE TEORÍA DE LA MEDIDA $s_n = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i}$ ADEMAS $\mu(A_i) < \infty$, PUES EN OTRO CASO, POR LA DEFINICIÓN DE s_n f NO SERÍA INTEGRABLE Y TAMPOCO $|f|^p$.

DEF UN ESPACIO DE MEDIDA $(\Omega\, \Sigma\, \mu)$ σ-FINITA SE LLAMA SEPARABLE SI EXISTE UNA SUCESIÓN $(B_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ CON

a) $\mu(B_n) < \infty$

b) $\forall A \in \Sigma$ CON $\mu(A) < \infty$ Y $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ CON $\mu(A \,\Delta\, B_n) = \mu((A - B_n) \cup (B_n - A)) < \varepsilon$.

UNA DIFERENCIA CON LOS ESPACIOS ℓ_p ES LA SIGUIENTE

PROPOSICIÓN (DESIGUALDAD DE JENSEN).

SI $\mu(\Omega) = 1$, $f \in L_1(\Omega)$ Y $\varphi [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ES UNA FUNCIÓN CONTINUA Y CONVEXA, SE TIENE QUE

$$\varphi\left(\int_\Omega |f|\, d\mu\right) \le \int_\Omega \varphi \circ |f|\, d\mu.$$

DEM SEA $t = \int_\Omega |f|\, d\mu \in [0,\infty)$

POR SER φ CONVEXA EN $[0,\infty)$, ENTONCES $0 < s < t < u < \infty$

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t-s} \le \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u-t}$$

SI $\beta = \sup\limits_{0<s<t} \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t-s} \Rightarrow \varphi(r) - \varphi(t) \underset{(*)}{\geq} \beta(r-t) \quad \forall r \in (0,\infty)$

(*) SI $r < t$ ES CLARO $(r-t<0)$

SI $r > t$ $\beta \le \frac{\varphi(r) - \varphi(t)}{r-t}$.

TOMANDO $r = |f(x)|$.

$\varphi(|f(x)|) - \varphi(t) - \beta(|f(x)| - t) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$.

$\varphi \circ |f|$ ES MEDIBLE, YA QUE φ ES CONTINUA, INTEGRANDO

$$\int_\Omega \varphi(|f(x)|)\, d\mu - \int_\Omega \varphi(t)\, d\mu - \beta \int_\Omega (|f(x)| - t)\, d\mu \geq 0$$

COMO $\mu(\Omega) = 1$ Y $t = \int_\Omega |f|\, d\mu \Rightarrow \int_\Omega \left(|f(x)| - \left(\int_\Omega |f(x)|\, d\mu\right)\right) d\mu = 0$

ASÍ $\int_\Omega \varphi(|f(x)|)\, dx \geq \int_\Omega \varphi\left(\int_\Omega |f|\, d\mu\right) \underset{\mu(\Omega)=1}{=} \varphi\left(\int_\Omega |f|\, d\mu\right)$.

COROLARIO: SI $1 \le p < q \le \infty$ SE TIENE QUE

$L_\infty[0,1] \hookrightarrow L_q[0,1] \hookrightarrow L_p[0,1] \hookrightarrow L_1[0,1]$

CON INCLUSIONES CONTINUAS, TALES QUE

$\|f\|_p \le \|f\|_q \quad \forall f \in L_q[0,1]$.

DEM SI $f \in L_q$. ENTONCES $f = f\chi_{\{|f| \le 1\}} + f\chi_{\{|f|>1\}} = f_1 + f_2$

$f_1 \in L_p$ Y $|f_2|^p \le |f_2|^q \Rightarrow f_2 \in L_p$ Y ASÍ $f \in L_p$.

POR OTRO LADO $\|f\|_p^q = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{q/p} \underset{\text{D. DE JENSEN}}{\le} \int_\Omega |f|^q = \|f\|_q^q$ c.q.d

DUALIDAD EN ESPACIOS $L_p(\Omega)$ (13)

COMO EN EL CASO DE ℓ_p DE SUCESIONES.

TEOREMA SEA (Ω, Σ, μ) UN ESPACIO DE MEDIDA σ-FINITA. EL ESPACIO $(L_p(\Omega))'$ ES ISOMÉTRICO A $L_q(\Omega)$ PARA $1 < p < \infty$ Y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

IDEA

1º) SI $g \in L_q(\Omega)$

$$T_g: L_p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$f \longrightarrow T_g(f) = \int_\Omega f \cdot g \, d\mu$$

ES UN FUNCIONAL LINEAL Y CONTINUO

$$\left| \int_\Omega f \cdot g \, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f \cdot g| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

DESIGUALDAD DE HÖLDER

Y SE PUEDE VER QUE $\|T_g\| = \|g\|_q$

2º) SI $T: L_p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$ LINEAL Y CONTINUO $\chi_A \in L_p(\Omega)$ $\forall A \in \Sigma$ CON $\mu(A) < \infty$

Y ASÍ $\nu(A) \overset{\text{DEF}}{=} T(\chi_A)$.

SE PUEDE VER QUE ν ES UNA MEDIDA CON SIGNO μ-CONTINUA, LUEGO POR EL TEOREMA DE RADON-NIKODYM EXISTE h μ-MEDIBLE CON $\nu(A) = T(\chi_A) = \int_A h \, d\mu$.

Y SE PUEDE VER QUE $T(f) = \int_\Omega f \cdot h \, d\mu$ $\forall f \in L_p(\Omega)$ Y QUE $h \in L_q(\Omega)$

TEOREMA SEA $(\Omega \, \Sigma \, \mu)$ UN ESPACIO DE MEDIDA σ-FINITA. ENTONCES $(L_1(\Omega))'$ ES ISOMÉTRICO A $L_\infty(\Omega)$.