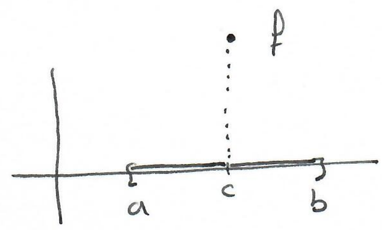
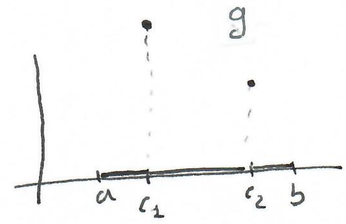
TEORÍA DE LA MEDIDA
(Y PROBABILIDAD)

LA INTEGRAL DE RIEMANN TIENE ALGUNOS ASPECTOS POCO SATISFACTORIOS.

A)





$f(x)=0$ SI $x \neq c$

$g(x)=0$ SI $x \neq c_1$ Ó c_2.

$$\int_a^b f = \int_a^b g = 0 \quad \text{PERO} \quad f \neq g.$$

B) LA FÓRMULA

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n. \quad (*)$$

SOLO ES CORRECTA SI $f_n \longrightarrow f$ UNIFORMEMENTE EN $[a,b]$. (SOLO CON LA CONVERGENCIA PUNTUAL NO ES SUFICIENTE)

VAMOS A DEFINIR UNA NUEVA INTEGRAL, LA INTEGRAL DE LEBESGUE, DONDE LA FÓRMULA (*) ES VÁLIDA EN CASOS MUY GENERALES Y DONDE PODAMOS OBVIAR EL PROBLEMA DEL APARTADO A)

LA INTEGRAL DE RIEMANN

EN $\mathbb{R}^n$ SABEMOS MEDIR "RECTÁNGULOS":

$\mathbb{R}$

$\mu([a,b]) = b-a.$

$\mathbb{R}^n$ $\quad A = [a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$ $\quad \mu(A) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$

SI $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Y $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{SI } x\in A \\ 0 & \text{SI } x\notin A \end{cases}$ ES RIEMANN INTEGRABLE

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \, dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

(MEDIDA O VOLUMEN DE A).

TEOREMA $f\ A = [a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n] \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ EN A SI Y SOLO SI ES INTEGRABLE RIEMANN

$D = \{x\in A : f$ NO ES CONTINUA EN $x\}$.

TIENE CONTENIDO NULO

(E.D. $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, (I_n)_{n=1}^{\infty}$ SUCESIÓN DE RECTÁNGULOS TALES QUE $D \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ Y $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(I_n) < \varepsilon$).

EJEMPLOS

1º) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{SI } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 0 & \text{SI } x\in[0,1]-\mathbb{Q} \end{cases}$ LA FUNCIÓN DE DIRICHLET NO ES INTEGRABLE RIEMANN. (NO ES CONTINUA EN NINGÚN PUNTO DE $[0,1]$.

SIN EMBARGO $f(x)=0$ SALVO EN $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ Y ESTE CONJUNTO TIENE CONTENIDO CERO.

2º) SEA $\mathbb{Q}\cap[0,1] = \{x_1, x_2, x_3 \dots \}$.

SEA $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{SI } x\in\{x_1,x_2\dots x_n\}. \\ 0 & \text{SI } x\in[0,1]-\{x_1,x_2\dots x_n\} \end{cases}$; $\int_0^1 f_n = 0$

CADA f_n ES INTEGRABLE RIEMANN.

$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ FUNCIÓN DE DIRICHLET $\forall x\in[0,1]$.

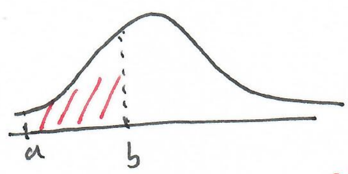
Y SIN EMBARGO f NO ES INTEGRABLE.

"OTRAS FORMAS DE MEDIR"

SE PUEDE PENSAR EN OTRAS FORMAS DE MEDIR RECTÁNGULO.

SEA $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Y SEA $\mu([a,b]) \overset{DEF}{=} \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx$



OBSERVACIÓN DE ESTA MANERA TIENE SENTIDO

MEDIR $\mu((-\infty, a]) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{1+x^2}\,dx < \infty.$

ESTE TIPO DE CONJUNTO NO TIENEN LONGITUD (SALVO ∞).

ADEMÁS SE PUEDE PENSAR EN "INTEGRAR" RESPECTO DE ESTA MEDIDA

$$\int_{-\infty}^{a} 2\,d\mu = 2\,\mu((-\infty, a]) < \infty.$$

VAMOS A TRATAR DE FORMALIZAR ESTAS IDEAS.

σ-ALGEBRAS

SEA Ω UN CONJUNTO Y SEA $P(\Omega)$ LAS PARTES DE Ω. SE PUEDE PENSAR EN UN ESPACIO DE PROBABILIDAD Y EL CONJUNTO DE SUCESOS POSIBLES, QUE SERÁ $P(\Omega)$ O ALGO MENOR.
UNA ESTRUCTURA RAZONABLE ES LA SIGUIENTE

DEF SEA Ω UN CONJUNTO Y SEA $\Sigma \subseteq P(\Omega)$. SE DICE QUE Σ ES UNA σ-ALGEBRA SI

a) $\Omega \in \Sigma$

b) SI $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$

c) SI $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$.

OBSERVACION •) $P(\Omega)$ ES UNA σ-ALGEBRA

•) SI A Y $B \in \Sigma \Rightarrow A \cap B \in \Omega$ $\left(A \cap B = (A^c \cup B^c)^c\right)$.

•) SI A Y $B \in \Sigma$ Y $B \subseteq A \Rightarrow A \setminus B \in \Sigma$ $(A \setminus B = A \cap B^c)$.

•) LA INTERSECCION DE σ-ALGEBRA ES DE NUEVO UNA σ-ALGEBRA

•) LA DEFINICION ANTERIOR SE PARECE EN "ALGO" A LA DEF DE TOPOLOGÍA.

EJEMPLO σ-ALGEBRA DE BOREL

SEA $A \subseteq P(\Omega)$ $\quad \Sigma_0 = \bigcap_{\substack{A \subseteq \Sigma \\ \Sigma\ \sigma\text{-ALGEBRA}}} \Sigma$ $\quad$ σ-ALGEBRA ENGENDRADA POR $A \subseteq P(\Omega)$

↑ colección

SEA $A = \{C \subseteq \mathbb{R}^n : C \text{ ABIERTO}\}$ LA σ-ALGEBRA ENGENDRADA POR LOS ABIERTOS DE UN ESPACIO TOPOLOGICO ($\mathbb{R}^n$ EN ESTE CASO) SE LE LLAMA σ-ALGEBRA DE BOREL

ESPACIO MEDIBLE

SI Ω ES UN ESPACIO DE PROBABILIDAD LA FAMILIA DE SUCESOS POSIBLES TIENE UNA ESTRUCTURA DE σ-ALGEBRA.

DEF SEA Ω UN CONJUNTO Y SEA $\Sigma \subseteq P(\Omega)$ UNA σ-ALGEBRA, AL PAR (Ω, Σ) SE LE LLAMA ESPACIO MEDIBLE

MEDIDAS

SOBRE UN ESPACIO MEDIBLE SE PUEDEN DEFINIR UNA O VARIAS MEDIDAS

DEF SEA UN ESPACIO MEDIBLE (Ω, Σ). SE LLAMA MEDIDA A UNA APLICACIÓN

$$\mu : \Sigma \to [0, \infty] \quad \text{CON}$$

a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) μ ES COMPLETAMENTE ADITIVA, E.D. SI $\{A_k\} \subseteq \Sigma$ Y $A_k \cap A_m = \emptyset$ SI $k \neq m$ ENTONCES

$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k \mu(A_k).$$

OBSERVACIÓN

•) SI $A \in \Sigma$ SE LE LLAMA CONJUNTO MEDIBLE Y SU MEDIDA ES $\mu(A)$.

•) SI $B \subseteq A$ CON $B, A \in \Sigma \Rightarrow \mu(B) \leq \mu(A)$

$(\mu(A) = \mu(B \cup (A \setminus B))) = \mu(B) + \mu(A \setminus B).)$

•) SI $\mu(\Omega) < \infty$ μ SE LLAMA FINITA (SI $\mu(\Omega) = 1$ SE LA LLAMA PROBABILIDAD).

•) SI $\exists \{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ CON $\Omega \subseteq \bigcup_{k=1} A_k$ Y $\mu(A_k) < \infty$ $\forall k$, SE DICE QUE μ ES σ-FINITA

• SI $\mu(B) = 0$ $\forall B \subseteq A \in \Sigma$ CON $\mu(A) = 0$, SE DICE QUE LA MEDIDA μ ES COMPLETA.

TEOREMA EN $\mathbb{R}^n$ EXISTE UNA σ-ALGEBRA $\Sigma \in P(\mathbb{R}^n)$ QUE CONTIENE ESTRICTAMENTE A LA σ-ALGEBRA DE BOREL Y UNA MEDIDA μ SOBRE Σ TAL QUE $\forall A = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$ RECTÁNGULO EN $\mathbb{R}^n$

$$\mu(A) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

A LA MEDIDA μ SE LE LLAMA MEDIDA DE LEBESGUE SOBRE LA σ-ALGEBRA DE LEBESGUE Σ

ESTA MEDIDA ES σ-FINITA Y COMPLETA.

AL PROCESO QUE PASA DE MEDIR CUBOS A DAR UNA MEDIDA SE LE LLAMA CONSTRUCCIÓN DE CARATHEODORY.

OBSERVACIONES:

SI SE TIENE $\mu^* \; P(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ QUE VERIFICA

a) $\mu^*(\emptyset) = 0$

b) $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$ SI $B \subseteq A$

c) $\mu^*(\bigcup_k A_k) \leq \sum \mu^*(A_k)$

EJEMPLO EN $\mathbb{R}^n$, SI $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{k} \mu(I_k) : A \subseteq \bigcup I_k \quad I_k \text{ CUBOS} \right\} \quad (*)$$

POR EL PROCESO DE CARATHEODORY SE PUEDE ENCONTRAR UNA Σ σ-ALGEBRA EN Ω Y UNA μ MEDIDA SOBRE Σ TAL QUE μ Y μ^* COINCIDEN SOBRE LOS ELEMENTOS DE Σ.

OBSERVACIÓN

•) EXISTEN $A \subseteq \mathbb{R}^n$ QUE NO SON MEDIBLES LEBESGUES

••) TODA MEDIDA SE PUEDE EXTENDER A OTRA QUE SEA COMPLETA

EJEMPLO SEA $f \; \mathbb{R} \to [0, \infty)$ TAL QUE EXISTE

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ EN EL SENTIDO DE RIEMANN

SI $\mu^*(I) = \int_I f(x)\,dx$ I INTERVALO,

Y DEFINIENDO $\mu^* \; P(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ COMO $(*)$,

μ^* ES UNA MEDIDA EXTERIOR Y SE PUEDE ENCONTRAR UNA σ-ALGEBRA EN $\mathbb{R}$ Y UNA MEDIDA μ SOBRE ELLA TAL QUE $\mu^*(I) = \mu(I) = \int_I f(x)\,dx$.

EJEMPLO SEA $\Omega = \mathbb{N}$ Y $\Sigma = P(\mathbb{N})$.

$$\mu \; P(\mathbb{N}) \longrightarrow [0, \infty]$$
$$A \longrightarrow \mu(A) = \text{Card.} A$$
ES UNA MEDIDA σ-FINITA.

FUNCIONES MEDIBLES

SEA (Ω, Σ, μ) UN ESPACIO DE MEDIDA (O DE PROBABILIDAD).

DEF. UNA FUNCION $f\ \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$.

SE DICE MEDIBLE (O QUE ES UNA VARIABLE ALEATORIA EN EL CASO $\mu(\Omega) = 1$) SI $\forall G \subseteq \mathbb{K}$ ABIERTO $f^{-1}(G) \in \Sigma$ (ES DECIR $f^{-1}(G)$ ES UN CONJUNTO MEDIBLE EN Ω O UN SUCESO).

PROP SI f Y g SON FUNCIONES MEDIBLES ENTONCES

$f+g$, $f \cdot g$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ Y $|f|$.

SON FUNCIONES MEDIBLES.

OBSERVACION •) SEA $(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu)$ CON μ LA MEDIDA DE LEBESGUE

LO MISMO QUE $\exists A \subseteq \mathbb{R}^n$ QUE NO ES MEDIBLE

EXISTEN FUNCIONES $f\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ NO MEDIBLES LEBESGUE.

••) SI $f\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ES CONTINUA, $f^{-1}(G)$ ES ABIERTO SI G ES ABIERTO, ASI f ES MEDIBLE LEBESGUE YA QUE LA σ-ALGEBRA DE BOREL ESTA INCLUIDA EN LA σ-ALGEBRA DE LEBESGUE.

TEOREMA SI $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ES UNA SUCESION DE FUNCIONES MEDIBLES, ENTONCES:

a) $\sup_k \{f_k\}$, $\inf_k \{f_k\}$, $\lim\sup_{k \to \infty} \{f_k\}$ Y $\lim\inf_{k \to \infty} \{f_k\}$.

SON FUNCIONES MEDIBLES

b) SI $\exists \lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$ $\forall x \in \Omega$, f ES EL LÍMITE PUNTUAL DE $\{f_k\}_k$ ENTONCES f ES MEDIBLE

OBSERVEMOS QUE EL LÍMITE PUNTUAL DE FUNCIONES CONTINUAS O INTEGRABLES NO TIENE PORQUE SERLO.

PROP. SI (Ω, Σ, μ) ES UN ESPACIO DE MEDIDA CON μ MEDIDA COMPLETA.

SI $f, g\ \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ SON TAL QUE f ES μ-MEDIBLE Y $\mu\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\} = 0 \Rightarrow g$ ES MEDIBLE

LA INTEGRAL DE LEBESGUE

DEF SEA (Ω, Σ, μ) UN ESPACIO DE MEDIDA

a) SEA $A \in \Sigma$, SE DEFINE LA FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DE A

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{SI } x \in A \\ 0 & \text{SI } x \notin A \end{cases}$$

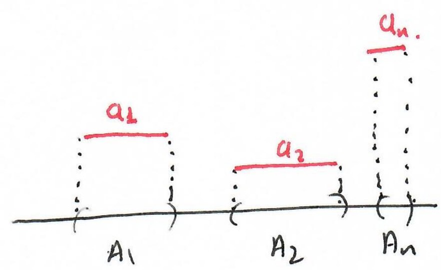
, QUE ES UNA FUNCIÓN MEDIBLE

($\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$, $\chi_A^{-1}(\{0\}) = A^c$ Y $\chi_A^{-1}([0,1]) = \Omega$).

b) SEA $(A_n)_{n=1}^{N} \subset \Sigma$ UNA COLECCIÓN FINITA Y DISJUNTA DE CONJUNTOS MEDIBLES Y SEAN $a_1 \ldots a_n \in \mathbb{K}$ LA FUNCIÓN MEDIBLE

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i}$$

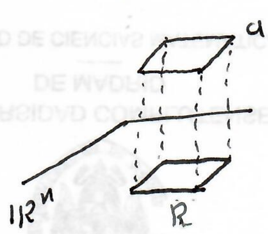
SE LLAMA FUNCIÓN SIMPLE O ESCALONADA



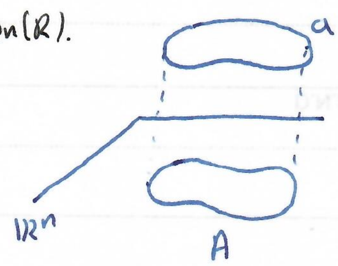
c) SE LLAMA INTEGRAL (DE LEBESGUE) DE LA FUNCIÓN SIMPLE $f(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i}$

A $$\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i} \overset{\text{DEF}}{=} \sum_{i=1}^{N} a_i \mu(A_i) \in \mathbb{R}.$$

ESTO ES SIMILAR A LAS SUMAS "SUPERIORES" O "INFERIORES" DE LA INTEGRAL DE RIEMANN, PERO EN ESTE CASO LOS A_i NO TIENEN POR QUÉ SER INTERVALOS O CUBOS SINO CONJUNTOS MEDIBLES



$$\int_{\mathbb{R}^n} a \chi_R \, dx = a \times \text{Volumen}(R).$$



$$\int_{\mathbb{R}^n} a \chi_A \, d\mu = a \, \mu(A)$$

LA CONVERGENCIA PUNTUAL QUE CONSERVA EL CARÁCTER DE SER MEDIBLE DE LAS FUNCIONES ES LA CLAVE PARA DAR UNA NOCIÓN GENERAL DE INTEGRACIÓN.

DEF SEA (Ω, Σ, μ) UN ESPACIO DE MEDIDA. SEA $\{f_k\}$ UNA SUCESIÓN DE FUNCIONES MEDIBLE. DECIMOS QUE $\{f_k\}$ CONVERGE PUNTUALMENTE A f μ-CASI TODO PUNTO. SI $\exists A \in \Sigma$ CON $\mu(A)=0$, TAL QUE $\forall x \in A^c$

$$\exists \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x).$$

PROPOSICIÓN: EN LAS CONDICIONES ANTERIORES.

a) f ES μ-MEDIBLE

b) SI $g: \Omega \to [0, \infty]$ ES μ-MEDIBLE EXISTE UNA SUCESIÓN MONÓTONA NO DECRECIENTE DE FUNCIONES SIMPLES $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ TALES QUE

(*) VER DETRÁS NO ESTÁ EL CASO

$$S_n \longrightarrow f \quad \text{PUNTUALMENTE SOBRE } \Omega.$$

ASÍ SI $f \geq 0$ ES POSIBLE DEFINIR

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega S_n.$$

LO CUAL SUGIERE DOS PREGUNTAS.

¿QUÉ OCURRE SI $S_n \to f$ Y $t_n \to f$ CON (S_n) (t_n) FUNCIONES SIMPLES Y $S_n \neq t_n$?

¿QUÉ OCURRE SI f ES MEDIBLE Y f NO ES POSITIVA?

DEF: SEA (Ω, Σ, μ) ESPACIO DE MEDIDA Y $f\ \Omega \to \mathbb{R}$. FUNCIÓN MEDIBLE

a) $f^+ = \max(f, 0)$ Y $f^- = \max(-f, 0)$. (AMBAS MEDIBLES)

OBSERVACIÓN: ES CLARO QUE f^+ Y $f^- \geq 0$ Y QUE $f = f^+ - f^-$.

(9)

* SEA $g: \Omega \to [0, \infty]$ MEDIBLE

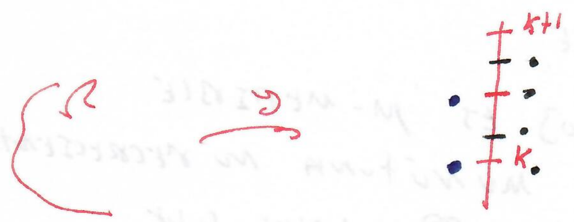
SEA $g_n(x) = \begin{cases} \frac{h-1}{2^k} & \text{SI } \frac{h-1}{2^k} \le g(x) < \frac{h}{2^k}, \; h = 1, 2, \dots, k2^k \\ k & \text{SI } g(x) \ge k \end{cases}$

SOR SER g MEDIBLE $A_h = \{x : \frac{h-1}{2^k} \le g(x) < \frac{h}{2^k}\}$ ES MEDIBLE

$A_k = \{x : g(x) \ge k\} = \{x : g(x) < k\}^c$

ES MEDIBLE

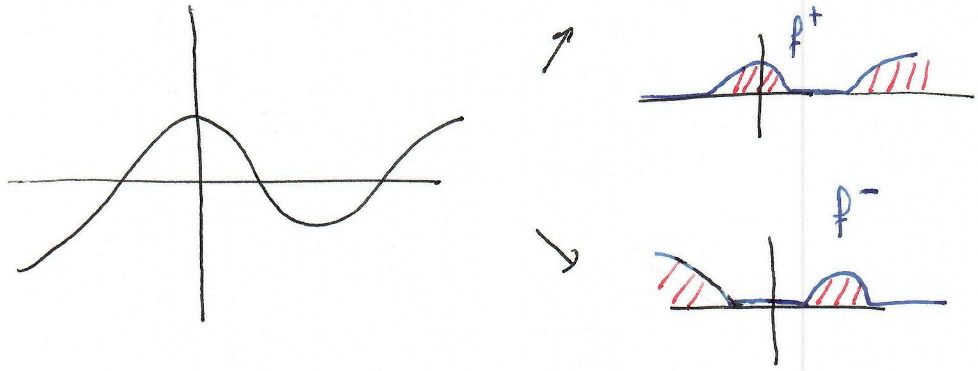
ASÍ $g_n(x) = \sum_{h=1}^{k2^k} \frac{h-1}{2^k} \chi_{A_h}(x) + k\chi_{A_k}$ SIMPLE



ASÍ $g_n(x) \le g(x)$ $\forall x \in \Omega$

Y $g_n(x) \uparrow$

$\exists \lim_{n \to \infty} g_n(x) = g(x)$.



DEF Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y sea $f\ \Omega \to \mathbb{K}$ una función medible

a) Si $f \geq 0$ se dice que f es integrable si $\exists (S_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de funciones simples con

$$S_n \longrightarrow f \quad \mu\text{-ctp}$$

tal que $$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega S_n < \infty$$

OBSERVACIÓN: Se prueba que $\forall\, r_n \longrightarrow f$ μ-ctp (r_n) funciones simples con $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega r_n < \infty$ se tiene que $\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega r_n$.

b) Si $f(x) \in \mathbb{R}$, f es integrable si lo son f^+ y f^- y así

$$\int_\Omega f(x)\, dx = \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu.$$

OBSERVACIÓN

$$\int_\Omega |f(x)|\, dx = \int_\Omega f^+ d\mu + \int_\Omega f^- d\mu.$$

c) Si $f(x) \in \mathbb{C}$, f es integrable si lo $|f|$ y así lo son $\mathrm{Re} f$ y $\mathrm{Im} f$ y así

$$\int_\Omega f(x)\, dx = \int_\Omega \mathrm{Re} f\, d\mu - i \int_\Omega \mathrm{Im} f\, d\mu.$$

d) Se denota por $\mathcal{L}_1(\Omega) = \{ f \text{ integrable} \}$.

OBSERVACIÓN Si $f\ \Omega \to \mathbb{R}$. f μ-medible, e integrable $|f|$ es integrable y $\exists\, \|f\|_1 = \int_\Omega |f|\, d\mu = \int_\Omega f^+ + \int_\Omega f^- d\mu$.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL:

SEA (Ω, Σ, μ) ESPACIO DE MEDIDA, SI $f, g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ Y $\lambda \in \mathbb{K}$

i) $\int f+g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$

ii) $\int \lambda f \, d\mu = \lambda \int f \, d\mu$.

iii) SI $0 \leq f \leq g \Rightarrow \int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu$

iv) $\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$.

v) SI $\int |f| \, d\mu = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ μ-c.d.g.

DEM v). SEA g μ-MEDIBLE Y POSITIVA ($|f| \geq 0$) CON $\int g \, d\mu = 0$.

SEA $A_n = \{x \in \Omega : g(x) \geq 1/n\}$.

$\Omega = (\bigcup A_n) \cup A$ CON $A = \{x \in \Omega : g(x) = 0\}$.

SI $\mu(A_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)) = 0$, ASI $g \equiv 0$ μ-c.d.g.

SE PRUEBA

SI $\exists n_0 : \mu(A_{n_0}) = \delta > 0$, SEA $\chi_{A_{n_0}}$ MEDIBLE E INTEGRABLE

ASI COMO $g\chi_{A_{n_0}} \leq g \Rightarrow$

$0 < \frac{1}{n_0} \mu(A_{n_0}) \leq \int_\Omega g \chi_{A_{n_0}} \leq \int_\Omega g$ CONTRADICCION,

LUEGO NO PUEDE DARSE ESTE CASO.

OBSERVACIÓN: NO SE NECESITA QUE f SEA CONTINUA PARA PROBAR v)

EJEMPLO SE (Ω, Σ, P) ESPACIO DE PROBABILIDAD Y SEA $X: \Omega \to \mathbb{R}$ VARIABLE ALEATORIA.

NO ESTA EN LA REP

SEA $F_X(\lambda) = P\{t \in \Omega : X(t) < \lambda\}$ FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE X

LA MEDIA O ESPERANZA DE X

$$EX \stackrel{\text{DEF}}{=} \int_\Omega X(t) \, dP(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) \, dx$$

T. CAMBIO DE VARIABLE (NO LO VEMOS)

SI F_X VIENE DADA POR UNA FUNCIÓN DE DENSIDAD $F_X(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f(x) \, dx$

COMPARACIÓN DE LA INTEGRAL DE RIEMANN Y LA DE LEBESGUE

SEA $(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu)$ EL ESPACIO DE MEDIDA $\mathbb{R}^n$ CON LA MEDIDA DE LEBESGUE μ.

A) SI $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ES CONTINUA, ENTONCES f ES μ-MEDIBLE E INTEGRABLE. SEA I CUBO

$$\int_I f(x_1 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \chi_I \, d\mu.$$

PARA FUNCIONES CONTINUAS NO GANAMOS NADA CON LA NUEVA INTEGRAL

B) SEA $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{SI } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{SI } x \in [0,1] - \mathbb{Q}. \end{cases}$

NO ES INTEGRABLE RIEMANN $\underline{\int} f = 0 < 1 = \overline{\int} f$.

AHORA $\mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$

DEM SEA $\varepsilon > 0$, SEA $[0,1] \cap \mathbb{Q} = \{x_1 \ldots \quad x_n \ldots\}$

SEA $I_n = [0,1] \cap [x_n - \varepsilon/2^n, x_n + \varepsilon/2^n]$ $\quad \mu(I_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$.

Y COMO $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

$$\mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) = 2\varepsilon$$

LUEGO COMO ESTO ES CIERTO $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$ $\mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$

ASI: $f \equiv 1$ μ-c.t.p YA QUE $\{x : f(x) \neq 1\} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Y ASI $\int_{[0,1]} f \, d\mu = \int_{[0,1]} 1 \, d\mu = 1$.

C) SEA $A \in \Sigma$, A MEDIBLE

$$\int_A f \, d\mu \underset{\text{DEF}}{=} \int_{\Omega} f \cdot \chi_A \, d\mu.$$

D) ADEMAS LA INTEGRAL DE LEBESGUE SE DIFERENCIA RESPECTO DE LA DE RIEMANN, Y ESTO ES LO IMPORTANTE, EN EL COMPORTAMIENTO RESPECTO A LOS LIMITES.

TEOREMAS DE CONVERGENCIA

TEOREMA (DE LA CONVERGENCIA MONÓTONA)

SEA (Ω, Σ, μ) UN ESPACIO DE MEDIDA Y SEA $(f_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}_1(\Omega)$ CON $f_k \uparrow f$, ES DECIR $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ ES UNA SUCESIÓN NO DECRECIENTE DE FUNCIONES MEDIBLES CON LÍMITE PUNTUAL f

ENTONCES $$\int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

OBSERVACIÓN SI $\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} f_n = \infty \Rightarrow f \notin \mathcal{L}_1(\Omega)$

EJEMPLO SEA $[0,1] \cap \mathbb{Q} = \{x_1, x_2 \dots x_n \dots\}$

SEA $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{SI } x = \{x_1 \dots x_n\} \\ 0 & \text{SI } x \in [0,1] - \{x_1 \dots x_n\} \end{cases} \uparrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{SI } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{SI } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

$$0 = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

TEOREMA (DE LA CONVERGENCIA DOMINADA)

SEA (Ω, Σ, μ) UN ESPACIO DE MEDIDA Y SEA $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ UNA SUCESIÓN DE FUNCIONES μ-MEDIBLES TAL QUE EXISTE EL LÍMITE PUNTUAL μ-c.t.p f, e.d.

$$f_k \longrightarrow f \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

SI $\exists g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ TAL QUE $|f_k| \leq g$ μ-c.t.p $\forall k \in \mathbb{N}$

ENTONCES, $f_k, f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ Y

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int_{\Omega} f_k \, d\mu.$$

OBSERVEMOS QUE EN CONDICIONES MUY GENERALES LA CONVERGENCIA PUNTUAL CONSERVA LA INTEGRABILIDAD, ALGO QUE NO OCURRÍA CON LA INTEGRAL DE RIEMANN

TEOREMA DE RADON-NIKODYM

EJEMPLO SEA $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arctg} x\Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi.$

ASI $\forall I$ INTERVALO

$$\nu(I)=\int_I \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

DA UNA FORMA DISTINTA DE MEDIR INTERVALOS Y POR EL PROCESO DE CARATHEODORY SE PUEDE ENCONTRAR Σ σ-ALGEBRA QUE CONTIENE A LOS INTERVALOS Y UNA MEDIDA $\bar{\nu}$ SOBRE Σ TAL QUE $\nu(I)=\bar{\nu}(I)$ $\forall I$ INTERVALO

OBSERVACION: SI (Ω,Σ,μ) ES UN ESPACIO DE MEDIDA, SI $\mu(A)<\infty$ ENTONCES

$$\int_\Omega \chi_A\,d\mu = \int_A 1\,d\mu = \mu(A)$$

LA MEDIDA μ SE RECUPERA CON LA INTEGRAL DE $f\equiv 1$.

DE FORMA GENERAL SE TIENE

TEOREMA (DE RADON-NIKODYM).

a) SEA μ UNA MEDIDA σ-FINITA, NO NEGATIVA Y COMPLETA DEFINIDA SOBRE LA σ-ALGEBRA Σ Y SEA $f\in\mathcal{L}_1(\Omega)$.
SE DEFINE $\nu(A)=\int_A f\,d\mu$ $\forall A\in\Sigma$.

ENTONCES ν ES UNA MEDIDA CON SIGNO $(\nu(A)\in\mathbb{R})$, σ-FINITA Y CONTINUA RESPECTO DE μ (E.D. $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ TAL QUE SI $\mu(A)<\delta \Rightarrow |\nu(A)|<\varepsilon$).

b) SEAN μ Y ν MEDIDAS σ-FINITAS DEFINIDAS SOBRE UNA MISMA σ-ALGEBRA Σ DE Ω; SI μ ES NO NEGATIVA Y ν ES UNA MEDIDA CON SIGNO CONTINUA CON RESPECTO A μ ENTONCES EXISTE $f\in\mathcal{L}_1(\Omega,\Sigma,\mu)$ TAL QUE $\nu(A)=\int_A f\,d\mu$ $\forall A\in\Sigma$.

EL TEOREMA DE FUBINI

$$\int_{[0,1]\times[0,2]} x^2+y^2\,dx\,dy = \int_0^2\left(\int_0^1 x^2+y^2\,dx\right)dy =$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^2 x^2+y^2\,dy\right)dx.$$

UN TEOREMA DE FUBINI PARA LA INTEGRAL DE LEBESGUE TAMBIEN SE TIENE. NECESITAMOS EL CONCEPTO DE ESPACIO DE MEDIDA PRODUCTO.

ESPACIOS DE MEDIDA PRODUCTO:

DADOS DOS ESPACIOS DE MEDIDA $(X,\mathcal{A},\mu)$ Y $(Y,\mathcal{B},\nu)$, SE PUEDE CONSIDERAR SOBRE EL ESPACIO PRODUCTO $X\times Y$

UNA σ-ALGEBRA $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$

TAL QUE

- $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ ESTA ENGENDRADA POR LOS CONJUNTOS $\{A\times B : A\in\mathcal{A}$ Y $B\in\mathcal{B}\}$

- SI $E\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, ENTONCES $E_x=\{y : (x,y)\in E\}\in\mathcal{B}$ $\forall x\in X$ Y $E_y=\{x : (x,y)\in E\}\in\mathcal{A}$ $\forall y\in X$.

Y UNA MEDIDA $\mu\otimes\nu$.

TAL QUE

- $\forall A\times B$ CON $A\in\mathcal{A}$ Y $B\in\mathcal{B}$ $\mu\otimes\nu(A\times B)=\mu(A).\mu(B)$

TEOREMA DE FUBINI SEAN $(X,\mathcal{A},\mu)$ Y $(Y,\mathcal{B},\nu)$ DOS ESPACIOS DE MEDIDA, CON μ Y ν σ-FINITAS. SEA $f\in\mathcal{L}_1(X\times Y,\mu\otimes\nu)$, ENTONCES

$$\varphi(x)=\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\in\mathcal{L}_1(X,\mu) \quad Y \quad \psi(y)=\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\in\mathcal{L}_1(Y,\nu)$$

Y ADEMAS $\displaystyle\int_{X\times Y} f\,d\mu\otimes\nu = \int_X \varphi(x)\,d\mu(x) = \int_Y \psi(y)\,d\nu(y)$.

OBSERVACION SI $X\times Y=\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$, Y f ES CONTINUA, Y $I\subseteq\mathbb{R}^3$ ES UN CUBO; ENTONCES EL TEOREMA DE FUBINI SOBRE $f.\chi_I$ ES COMO EL QUE CONOCEMOS.