

1.- Se define $\langle , \rangle : C[a,b] \times C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

Probar que \langle , \rangle es un producto escalar sobre $C[a,b]$ que no es completo.

2.- a) Probar que las siguientes familias son ortogonales en los espacios que se indican : i) $\{\cos nx, \operatorname{senn}x\}_{n \geq 0}$ en $L_2[-\pi, \pi]$. ii) $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ en $(L_2[-\pi, \pi], \mathbb{C})$ iii) las familias $\{\cos nx\}_{n \geq 0}$ y $\{\operatorname{senn}x\}_{n \geq 1}$ en $L_2[0, \pi]$.

3.- Sea $x, y \in H$, siendo H un espacio de Hilbert y x e y ortonormales. Probar que $\|x - y\| = \sqrt{2}$.

4.- Sea H un espacio pre-Hilbert. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una familia ortonormal de H y $e \notin [e_1, \dots, e_n]$, probar que $E_{n+1} = e - \sum_{i=1}^n \langle e, e_i \rangle e_i$ es un vector ortogonal a $[e_1, \dots, e_n]$ y además $[e_1, \dots, e_n, e] = [e_1, \dots, e_n, E_{n+1}]$. (Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt).

5.- Los polinomios $P_n(x) = \frac{\sqrt{\frac{(2n+1)}{2}}}{2^{2n} n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^2 - 1)^n \quad n \geq 0$, se conocen como polinomios de Legendre. Probar que $(P_n(x))_{n \geq 0}$ que es una familia ortonormal y que $[P_1(x), \dots, P_n(x)] = [1, x, x^2, \dots, x^n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. (La familia $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es el resultado de aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a $\{x^n\}_{n \geq 0} \subseteq (L_2[-1, 1], \mathbb{R})$).

6.- (Teorema de Riesz-Fischer). Probar que si (f_n) es una familia ortonormal de un espacio de Hilbert separable H , entonces $[f_n]$ es isométrico a ℓ_2 . Deducir que $L_2[0, 1]$ es isométrico a ℓ_2 .

7.- Sea (x_n) una sucesión de un espacio normado X . Si la sucesión converge a $x \in X$ y se considera la sucesión de medias Cesáro $\sigma_k = \frac{x_1 + \dots + x_k}{k} \quad k \in \mathbb{N}$, probar que (σ_n) converge a x .

En lo que sigue las funciones que se presentan pertenecen a $L_2[-\pi, \pi]$ y por tanto admiten una serie de Fourier. Así la convergencia que se presenta es puntual μ -c.t.p. Es más, la convergencia es en todo punto por resultados clásicos del Análisis de Fourier.

8.- Sea $f \in C[-\pi, \pi]$ 2π -periódica y derivable. Probar que si f es par (e.d. $f(-x) = f(x)$), entonces se puede escribir:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Y por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{senn}x$ si f es impar (e.d. $f(-x) = -f(x)$).

9.- Probar que:

$$a) \quad x = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{senn}x}{n}, \quad 0 < x < 2\pi$$

$$b) \quad \frac{x^2}{2} = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cos}nx}{n^2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$c) \quad x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{senn}x}{n}, \quad -\pi < x < \pi$$

$$d) \quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{cos}nx}{n^2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

10.- Probar las siguientes igualdades:

$$a) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad b) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

(Indicación: Usar las igualdades del ejercicio anterior).

11.- Hallar las series de Fourier de las funciones:

$$i) \quad f(x) = |x| \quad ii) \quad f(x) = \cos^3 x \quad iii) \quad f(x) = e^x.$$

12.- Sea $f \in C[-\pi, \pi]$ 2π -periódica y tal que su sucesión de coeficientes de Fourier pertenece a ℓ_1 . Probar que la serie de Fourier de f converge uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$.