

1.- Sea  $X$  un espacio normado de dimensión mayor o igual a 1. Probar que  $X' \neq \{0\}$ .

2.- Sea  $X$  un espacio normado, sean  $a, b \in X$  con  $a \neq b$ . Probar que existe  $f \in X'$  tal que  $f(a) \neq f(b)$ .

3.- Sea  $X$  un espacio normado .

a) Si  $\{x_1, \dots, x_n\}$  es un conjunto finito de vectores linealmente independientes de  $X$ , probar que existen funcionales  $f_1, \dots, f_n \in X'$  tales que  $f_j'(x_i) = \delta_{i,j}$ .

b) Si  $M \subseteq X$  es un subespacio vectorial de dimensión finita, probar que existe  $P : X \longrightarrow M$  una proyección lineal y continua.

4.- Sea un espacio normado. Probar que si  $M \subseteq X$  es un subespacio de  $X$  y  $a \notin M$ , entonces  $a \in \overline{M}$  si y solo si  $f(a) = 0$  para todo funcional  $f \in X'$  con  $f|_M \equiv 0$ .

(Indicación: Usar el Teorema de Hahn-Banach en forma geométrica).

5.- Sea  $X$  un espacio normado y se  $A \subset X$ . Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a)  $A$  está acotado.

b) Para todo  $f \in X'$   $f(A)$  está acotado.

(Indicación: Usar que  $J : X \longrightarrow X''$  es una isometría y el Teorema de la Acotación Uniforme).

6.- Sea  $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ ,  $X$  espacio normado y  $f$  lineal.

Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a)  $f$  es continua

b)  $\ker f = \{x \in X : f(x) = 0\}$  es cerrado.

7.- Sea  $X$  un espacio vectorial y sean  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_2$  dos normas sobre  $X$  respecto de las cuales  $X$  es completo. Si existe  $C > 0$  tal que  $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$  para todo  $x \in X$ , probar que ambas normas son equivalentes.

(Indicación: Usar el Teorema de la Aplicación Abierta).

8.- Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios de Banach y sea  $T : X \longrightarrow Y$  una aplicación lineal tal que para todo  $f \in Y'$   $f \circ T \in X'$ . Probar que  $T$  es continua.

(Indicación: Usar el problema 5).

9.- Sea  $C$  un abierto convexo de  $X$  espacio normado. Sean  $y_0 \in C$  y  $x_0 \notin C$ . Probar que  $C_1 = C - \{y_0\}$  es un abierto convexo tal que  $0 \in C_1$  y que  $x_0 - y_0 \notin C_1$ .

10.- Si  $A$  y  $B$  son dos conjuntos convexos no vacíos y disjuntos de un espacio normado, siendo  $A$  abierto. Probar que  $C = A - B$  es un conjunto abierto y convexo.

11.- Sea  $c_{00} = \{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \text{existe } n_0 \text{ tal que si } n > n_0 \text{ } x_n = 0 \}$ .  
a) Construir sobre  $(c_{00}, \|\cdot\|_1)$  una sucesión de funcionales  $(f_n)_{n \geq 1}$  lineales tales que para todo  $x \in c_{00}$

$$\sup\{ |f_n(x)| : n = 1, 2, 3, \dots \} < \infty$$

y que  $\|f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ .

b) ¿Porqué la parte a) no contradice el Teorema de la Acotación Uniforme ?

12.- Encontrar en  $\mathbb{R}^2$  dos conjuntos convexos no vacíos disjuntos tales que no puedan ser separados estrictamente por un hiperplano.

13.- Probar que si el espacio dual  $X'$  de un espacio normado es separable, entonces el propio espacio  $X$  lo es también.

(Indicación: Usar el Teorema de Hahn-Banach en forma geométrica).

14.- Sea  $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de términos positivos tales que  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$ . Siempre se puede encontrar otra sucesión de términos positivos

$(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$  con  $\limsup \gamma_n = \infty$  y tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_n < \infty$ . Probar este hecho de dos

formas distintas.

a) Usando técnicas elementales de series.

b) Usando el Teorema de la Aplicación Abierta sobre  $T : \ell_{\infty} \rightarrow \ell_1$  con  $T(x) = (\alpha_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ , y suponer que no existe una sucesión  $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$  con las características de arriba.