

V.C.A.F. Hoja 6

1.- Sea $(X, \| \cdot \|)$ un espacio normado . Probar que :

- a) $| \|x\| - \|y\| | \leq \|x + y\|$ para todo $x, y \in X$.
 b) Toda sucesión de Cauchy está acotada .

2.- Probar que sobre \mathbb{R}^n los funcionales $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_p$ y $\| \cdot \|_\infty$ son normas equivalentes . Dibujar en cada caso $B_{\mathbb{R}^n}$.

3.- Estudiar si los siguientes conjuntos son abiertos , cerrados o compactos en $(C[0,1], \| \cdot \|_\infty)$ y $(C[0,1], \| \cdot \|_1)$:

- a) $\left\{ f \in C[0,1] : f(0) + \int_0^1 f(t) \cos t \, dt \geq 0 \right\}$
 b) $\left\{ f \in C[0,1] : |f(t)| < 1/2 \quad \forall t \in [0, 1/2] \right\}$

4.- Sea $E = C^1[0,1]$; para cada $f \in E$ se define

$$\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty .$$

Probar que :

- a) $\| \cdot \|$ es una norma sobre E .
 b) La convergencia en $\| \cdot \|$ implica la convergencia en $\| \cdot \|_\infty$.
 c) $(E, \| \cdot \|)$ es completo.
 d) Las normas $\| \cdot \|$ y $\| \cdot \|_\infty$ no son equivalentes.

5.- Sea $(X, \| \cdot \|)$ un e.n. Probar que las siguientes aplicaciones son continuas:

- a) $\| \cdot \| : X \longrightarrow \mathbb{K}$
 b) $+ : X \times X \longrightarrow X$ c) $\cdot : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X$
 $(x, y) \longrightarrow x+y$ $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda \cdot x$

6.- Sea $(X, \| \cdot \|)$ un espacio de Banach y sea $K \subseteq C$. Probar que son equivalentes :

- a) K es precompacto (e.d. \overline{K} es compacto) .
 b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto $F \subset X$ finito tal que $K \subseteq \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon)$.

7.- Sea K un métrico compacto y $F \subseteq C(K)$ equicontinuo. Prueba que dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $d(t,s) \leq \delta$, $t,s \in K$, entonces $|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$, $\forall f \in F$.

8.- Demuéstrese con ejemplos que las siguientes afirmaciones son falsas:
a) Toda familia infinita de funciones de $C[0,1]$ equicontinua contiene una sucesión que converge en norma $\| \cdot \|_{\infty}$.
b) Toda familia infinita de funciones de $C[0,1]$ acotada contiene una sucesión que converge en norma $\| \cdot \|_{\infty}$.

9.- Sea $F \subset C[0,1]$ el conjunto de las funciones f derivables en $[0,1]$ que verifican que $|f(t)| \leq 1476$ y $|f'(t)| \leq 2386$ para todo $t \in [0,1]$. Probar que toda sucesión (f_n) de F admite una subsucesión convergente en norma.

10.- Sea $A \subset C[0,1]$ un conjunto acotado. Para cada $f \in A$ se define

$$F_f(t) = \int_0^t f(s)ds \quad . \quad \text{Sea } B = \{ F_f : f \in A \}.$$

a) ¿ Es B una familia equicontinua ?
b) Sea (g_n) una sucesión de elementos de B que converge uniformemente a una función g ¿Es cierto que $g \in B$?

11.- (Teorema de Dini). Sea $(f_n) \subset C[0,1]$ una sucesión de funciones a valores reales. Para cada $t \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f_{n+1}(t) \geq f_n(t)$ y existe $f \in C[0,1]$ tal que $f_n(t) \uparrow f(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Probar que la sucesión (f_n) converge en norma a la función f .

12.- Sea K un espacio métrico compacto . Entonces toda sucesión $(f_n) \subset C(K)$, puntualmente convergente y equicontinua en K , es convergente en norma. (Indicación: reconstruir la prueba del teorema de Ascoli-Arzelà).