V.C.A.F. Hoja 7

1.- Sea $(X,\| \ \|)$ un espacio normado .

a) Probar que la adherencia de la bola abierta es la correspondiente bola cerrada.

b) Si $B_a(r) \subseteq B_b(s)$, probar que $r \leq s$ y que $\|a-b\| \leq s-r$.

2.- Probar que en todo espacio de Banach toda sucesión de bolas cerradas, no vacías, y encajadas (e.d. $B_{x_{n+1}}(r_{n+1}) \subseteq B_{x_n}(r_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$) tienen todas ellas un punto en común.

3.- Sea X un espacio normado. Sea B_X la bola unidad. Probar que B_X es un conjunto convexo.

4.- Poner un ejemplo de una sucesión, de sucesiones, $\xi_n = (x_k^n)_{k=1}^{\infty}$ $n \in \mathbb{N}$, que verifique que:

a) (ξ_n) pertenece a ℓ_∞ y ℓ_1, converge a 0 en ℓ_∞, pero no converge en ℓ_1

b) (ξ_n) pertenece a ℓ_∞ y ℓ_2, converge a 0 en ℓ_∞, pero no converge en ℓ_2

c) (ξ_n) pertenece a ℓ_2 y ℓ_1, converge a 0 en ℓ_2, pero no converge en ℓ_1

d) (ξ_n) pertenece a c_0 y ℓ_2, converge en c_0, pero no converge en ℓ_2.

5.- Encontrar $x \in c_0$, tal que $x \notin \ell_p$ para todo $p \in [1,\infty)$.

6.- a) Si $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$ son dos normas sobre un espacio vectorial X, probar que las expresiones:

$$\alpha\| \ \|_1 + \beta\| \ \|_2 \quad (\alpha,\beta>0) \quad \text{y} \quad \max\{\| \ \|_1, \| \ \|_2\}$$

definen nuevas normas sobre X.

b) Calcular la bola unidad cerrada en $\mathbb{R}^2$ en la norma $\| \ \| = \max\{\| \ \|_1, 2\| \ \|_2\}$.

7.- Comprobar que en $\mathbb{R}^2$ $\|(x_1,x_2)\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$, $0<p<1$, **no** es una norma sobre $\mathbb{R}^2$.

8.- Sea X un espacio normado separable e $Y \subseteq X$ un subespacio vectorial cerrado. Probar que Y es separable.

9.- Determinar cual de los siguientes conjuntos es convexo:

1) $\{f \in C[0,1] \ : \ \int_0^1 f(t)dt = 1 \}$

2) $\{x \in \ell_\infty \ : \ \|x\|_\infty \in (1,2) \}$

3) $\{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 \ : \ x_n \leq 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$

10.- Sea $(X,\| \ \|)$ un espacio de Banach. Si $A \subseteq X$ tiene la propiedad de que para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $F = \{x_1,x_2,...,x_s\} \subseteq X$ de modo que $A \subseteq F + \varepsilon B_X$, probar que A es un conjunto precompacto (e.d. $\overline{A}$ es compacto).